

Využitie geoštatistických metód špecializovaných programových prostredí pre modelovanie geologických objektov a ich vizualizácia v ArcGIS

Vizi Ladislav

Ústav geodézie, kartografie a GIS, Fakulta BERG, TU v Košiciach, Letná 9,
042 00, Košice, Slovensko
ladislav.vizi@tuke.sk

Abstrakt. Predkladaný článok demonštruje príklady geoštatistického modelovania pre geologické a banské aplikácie vo vybraných špecializovaných programových prostrediach a následnej externej vizualizácie získaných výsledkov v prostredí ArcGIS-ArcScene. Prezentované príklady sa sústreďujú na modelovanie v oblasti geológie a baníctva, rôznych úrovní od jednoduchých geologických modelov geometrie a celkových (globálnych) odhadov zásob ložísk úžitkových nerastov až po komplexné priestorové odhady lokálnych vyťažiteľných zásob v 3D priestore. Príspevok ďalej stručne porovnáva možnosti a kvality týchto špecializovaných programov s integrovanými programovými prostrediami, obsahujúcimi moduly a nadstavby geoštatistického modelovania, a zároveň hodnotí klady a zápory univerzálnych programových prostredí v porovnaní so špecializovanými.

Kľúčová slova: geoštatistika, modelovanie, baníctvo, celkové zásoby, vyťažiteľné zásoby.

Abstract. Using of the geostatistical methods of the specialized software environment for modelling of the geological objects and visualization of the results in ArcGIS. The presented paper shows some examples of geostatistical modelling using the specialised software, and follows-up by the external visualization of the obtained results in ArcGIS environment, ArcScene module. Individual examples focus on modelling in geology and mining, ranking from simple geological models of geometry and global reserve estimation of the mineral deposits to the complex models of local recoverable reserves estimation. The paper also compares possibilities and abilities of the specialized geostatistical software with some integrated software environments including the modules and extensions for geostatistical modelling and, at the same time, it assesses the pros and cons of the universal software environments in comparison to the specialized ones.

Keywords: geostatistics, modelling, mining, global reserves, recoverable reserves.

1 Úvod

Geoštatistika, v kombinácii s inými štatistickými metódami, ako aj externými znalosťami riešeného problému, poskytuje široké spektrum matematických a špeciálnych štatistických nástrojov, ktoré je možné použiť na analýzu dostupných údajov, modelovanie, odhady a simulácie rozdielnych typov priestorových čŕt geologických objektov.

Geoštatistika, ktorá má svoje počiatky práve v banskom priemysle, je samostatná vedná disciplína založená na teórii regionalizovanej premennej a náhodnej funkcie, ktorú matematicky popísal prof. Matheron [7], a ktorá prirodzene rozširuje klasický koncept náhodnej premennej do jej priestorovej podoby, a následného modelovania a odhadov jej parametrov. Na základe tejto teórie je možné predpokladať študovaný mineralizovaný fenomén ako určitú realizáciu náhodného procesu. Napriek jej využívaniu v rôznych iných odvetviach výskumu a priemyslu, ako je napr. ropný priemysel, poľnohospodárstvo, lesníctvo, klimatológia alebo aj rybársky priemysel, má vzhľadom k jej počiatkom svoje široké uplatnenie v procesoch oceňovania zásob úžitkových nerastov aj dnes, a neustále poskytuje priestor pre výskum a aplikácie nových prístupov a techník odhadov a simulácií vyťažiteľných zásob. Retrospektívne, dnes tak geoštatistika poskytuje široký rozsah priestorových analýz, stochastických odhadov a simulačných nástrojov pre riešenie praktických problémov banského priemyslu. Detailný popis jednotlivých geoštatistických techník odhadov vyťažiteľných zásob je preto nad rámec jedného príspevku, a pre potreby zorientovania sa v širokom spektre dnes dostupných techník a ich použitia je potrebné ich dôsledné štúdium a pochopenie princípov. Rozsah tejto problematiky sa zvyšuje aj používaním metód z iných odvetví aplikácie geoštatistiky, vyplývajúce z jej postupnej diferenciacie. Ako príklad je možné uviesť diskretné modelovanie litofácií využívané v ropnom priemysle pre modelovanie petrofyzikálnych vlastností rezervoárov, ktoré sa v banskom priemysle používa pre detailné geologické kódovanie podoblastí študovaného ložiska alebo jeho časti.

2 Stručný popis geoštatistických nástrojov

Detailná analýza štatistických parametrov a priestorovej korelácie dostupných údajov je vždy kľúčovou v rámci rôznych geoštatistických prístupov [3]. V rámci *exploratívnej analýzy údajov* je pravdepodobne najdôležitejšie štúdium statickej experimentálnej distribúcie a odhad parametrov teoretickej distribúcie na základe dostupných údajov. Táto analýza slúži v prvom rade pre potreby rozhodnutí o stacionarite a následnom aplikovaní transformácie počiatočného rozdelenia do normálneho Gaussovho rozdelenia, nakoľko je teória náhodnej funkcie postavená na základe stacionarity (alebo aspoň intrinsickej stacionarity) prvých dvoch momentov rozdelenia. Ďalšími nástrojmi exploratívnej analýzy, ktoré je potrebné uviesť sú:

- štúdium prítomnosti extrémnych hodnôt, ktoré spôsobujú „eratický“ priebeh experimentálnych variogramov,
- štúdium anizotropie, ktorá je dôsledok zmeny priestorovej autokorelácie (geometrická anizotropia) alebo variability (zonálna anizotropia) v rôznych smeroch študovaného priestoru,
- výpočet deklastračných váh v prípade preferenčného vzorkovania oblastí zvyčajne vysokých hodnôt mineralizácie pre potreby nevychýleného modelovania rozdelenia pravdepodobnosti študovanej populácie a jej prípadnej transformácie do normálneho rozdelenia,
- korelačná analýza pre potreby následnej multivariačnej analýzy navzájom korelujúcich regionalizovaných premenných, napr. v prípade výrazného podvzorkovania jednej alebo viacerých z nich,
- regularizácia veľkostí vzoriek (napr. dĺžok vrtných jadier) na konštantnú veľkosť nositeľa informácie a iné.

Nakoľko sú geoštatistické metódy odhadov a simulácií tzv. modelovo-založené, následným krokom geoštatistickej analýzy je vytvorenie matematického modelu náhodnej funkcie pomocou priestorových štatistík (variogram/kovariancia) jednej alebo viacerých navzájom korelujúcich regionalizovaných premenných. Tento priestorový model je založený na samotných dostupných údajoch, na základe ktorých sú počítané a graficky vizualizované diskkrétne krivky experimentálnych variogramov, ale tiež integruje doplňujúce znalosti riešeného problému, ako napr. geologické črty, tektonické modely, pozorované smery preferenčnej mineralizácie, atď. Model náhodnej funkcie môže byť založený na jednej alebo viacerých regionalizovaných premenných a môže byť zložený z jednej alebo viacerých štruktúr priestorovej variability, pričom každá z nich má svoj vlastný dosah vplyvu priestorovej autokorelácie, úrovne variability a smeru anizotropie. Takýto model sa nazýva *lineárny model (co)regionalizácie* a proces jeho vytvorenia je známy ako *štruktúrna analýza*.

Matematický model náhodnej funkcie je následne použitý pre rôzne účely ako globálny či lokálny odhad vyťažiteľných zásob, simulácie alebo hodnotenie nespoľahlivosti a riziku odhadu, atď. Jedným z najbežnejších použití tohto modelu je v procese odhadu neznámych hodnôt tzv. *krigovaním* – veľmi dobre známej metódy priestorovej multilineárnej regresie pre odhad váh použitých pre následný odhad neznámej hodnoty na základe váženej lineárnej kombinácie dostupných údajov v rámci tzv. účinného okolia odhadu [12]. Dnes existujú rôzne podoby krigovania v zmysle predpokladu stacionarity priemeru (jednoduchý kriging, bežný kriging, krigovanie s trendom či univerzálny kriging), alebo podľa počtu súčasne modelovaných premenných (tzv. kokriging). Krigovanie môže byť, na rozdiel od iných interpolačných metód, použité nie len na odhad neznámej hodnoty v bode, ale aj priemernej hodnoty určitej plochy, objemu alebo daného polygónu (bodový, blokový alebo polygónový kriging). Okrem odhadu tejto neznámej hodnoty poskytuje krigovanie aj odhad lokálnej nespoľahlivosti odhadu na základe výpočtu tzv. krigovacieho rozptylu [2].

Keďže krigovanie patrí do skupiny lineárnych interpolačných metód, nie je schopné riešiť problémy odhadov tonáží alebo kovnatostí študovanej mineralizácie nad danú podmienku bilančnosti (cut-off) pre ocenenie vyťažiteľných zásob pre projektovanú metódu dobývania. Riešenie takýchto problémov si vyžaduje nelineárny prístup a *nelineárne metódy* ako sú lognormálne krigovanie, indikátorové krigovanie, disjunkzívne krigovanie a rovnomerné podmieňovanie [10].

V prípade požiadavky ohodnotenia nespoľahlivosti odhadu, alebo vytvorenia alternatívnych produkčných scenárov, môže byť vytvorený model náhodnej funkcie použitý pre potreby *simulácií*, ktoré vytvárajú série rovnako pravdepodobných realizácií, pričom každá z nich sa riadi rovnakými vstupnými údajmi a reprodukuje priestorový model priestorovej variability náhodnej funkcie ako aj experimentálne rozdelenie pravdepodobností vytvorené na základe vstupných údajov [4]. Najpoužívanejšie simulačné algoritmy v banskej praxi sú sekvenčná indikátorová simulácia, sekvenčná Gaussova simulácia a metóda Turning Bands. Pre vytvorenie vstupných geologických modelov sa používajú simulačné techniky pre diskkrétne premenné ako napr. už spomínaná sekvenčná indikátorová simulácia a ďalej truncačná simulácia, plurigaussická simulácia [1], alebo objektovo založené simulácie ako napr. boolenská simulácia.

Použitiu nelineárnych metód a simulácií predchádza *modelovanie experimentálnej distribúcie* (histogramu rozdelenia početností) matematickou funkciou, tzv. Gaussovou anamorfózou na základe expanzie Hermitových polynómov [10]. Tento model vytvára prepojenie medzi rozdelením počiatkovej premennej a jej transformovanou podobou do normálneho rozdelenia pre potreby odhadov a simulácií založených na transformovaných údajoch, a späťnej transformácie výsledných odhadov a simulácií z Gaussovho priestoru do počiatkovej. Takýto model rešpektuje rôzne úrovne variability spôsobené rôznymi veľkosťami projektovaných ťažobných jednotiek (tzv. *support efekt*), ako aj projekt budúceho rozmiestnenia údajov v čase ťažby (tzv. *informačný efekt*). Zjednodušením modelovania Gaussovej anamorfózy je často využívaná kvantilová transformácia [11].

Menej používané metódy v banskej praxi sa objavujú v prípade potreby *integrácie* rozdielnych premenných popisujúcich rovnaký študovaný fenomén ako napr. chemických analýz z vrtných jadier a vrtnéj karotáže, alebo v prípade geologického modelovania, napr. integrácia seizmického a vrtného prieskum ložiskových polôh. Najpoužívanejšie metódy integrácie týchto údajov sú kolokačný kokriging a krigovanie s externým driftom [20].

3 Príklady odhadov in-situ celkových zásob v prostredí Geostokos Toolkit

Táto časť príspevku sa zaoberá dvoma príkladmi odhadov celkových zásob aplikovaných na dvoch slovenských magnezitových ložiskách. Prvý príklad sa týka štatistickej a geoštatistickej analýzy a globálneho odhadu zásob na ložiskovej časti Bankov-Banisko. Tieto analýzy a modelovanie boli realizované v rámci časti praktických cvičení z predmetu *Modelovanie geologických systémov a procesov* v rokoch 2000/2001 a 2002/2003 pod vedením autora tohto príspevku [5]. Druhý príklad sa týka geoštatistického modelovania celkových zásob ťažobného sektora C na ložiskovej časti Miková – Jelšava v rámci HZ medzi TU v Košiciach a SMZ, a.s. v roku 2002 [13].

Poznámka. Tieto konkrétne prípadové štúdie neboli zatiaľ detailne publikované a akákoľvek podobnosť s nižšie uvedenými príkladmi v zmysle štatistických a geoštatistických analýz, alebo inými výstupmi týchto prípadových štúdií z prostredia Geostokos Toolkit je dôsledkom kopírovania príslušných častí z vyššie uvedených záverečných správ.

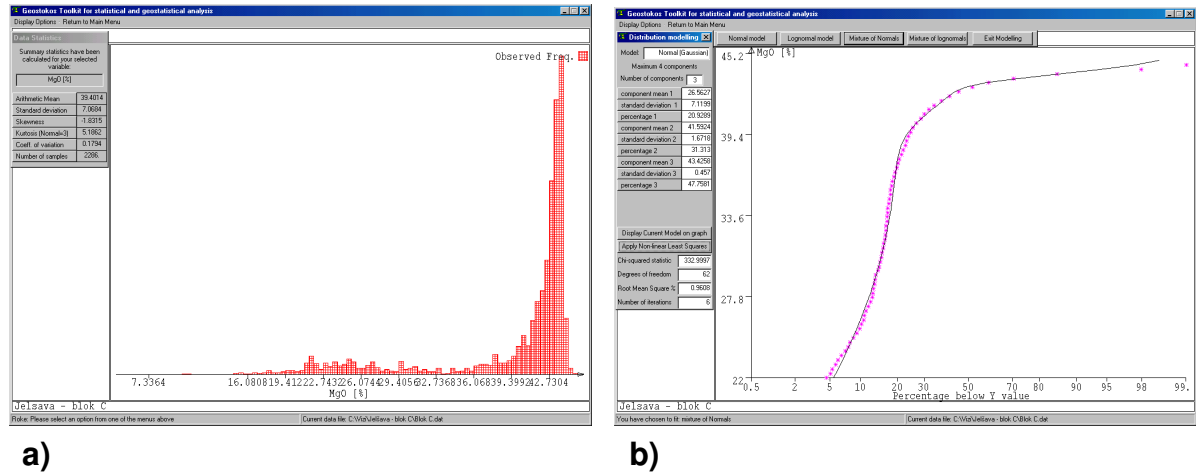
Obe prezentované prípadové štúdie boli robené v komerčnom špecializovanom programe Geostokos Toolkit [21, 22] získaného na základe osobnej komunikácie doc. Timčáka z TU, FBERG s Dr. Clark (Geostokos Ecosse Ltd.). Programové prostredie Geostokos Toolkit sa vyznačuje veľmi dobrým prostredím pre 2D a 3D geoštatistické modelovanie a oplýva širokou paletou analýz a nástrojov. Ako najdôležitejšie je potrebné, okrem možnosti zobrazenia jednoduchej 2D farebnej mapy hodnôt dostupných vzoriek, uviesť nasledovné:

- analýza minimálnych vzdialeností vzoriek pre potreby optimalizácie výpočtov experimentálnych variogramov,
- regularizácia veľkostí vrtných jadier na výšku projektovanej dobývacej lávky a bunková deklarácia,
- logaritmickej, indikátorová a poradová transformácia údajov,
- ANOVA test pre hodnotenie nastavenia trendových plôch a ich vizualizáciu,
- výpočet kriviek selektivity (kovnosť/tonáž) a sekvenčná simulácia pre normálne a lognormálne rozdelené údaje,
- multivariačná analýza hlavných komponentov,
- deterministické interpolačné metódy ako napr. IDW,
- použitie polygónu pre delineaáciu študovaného územia a 2D zlomového systému a iné.

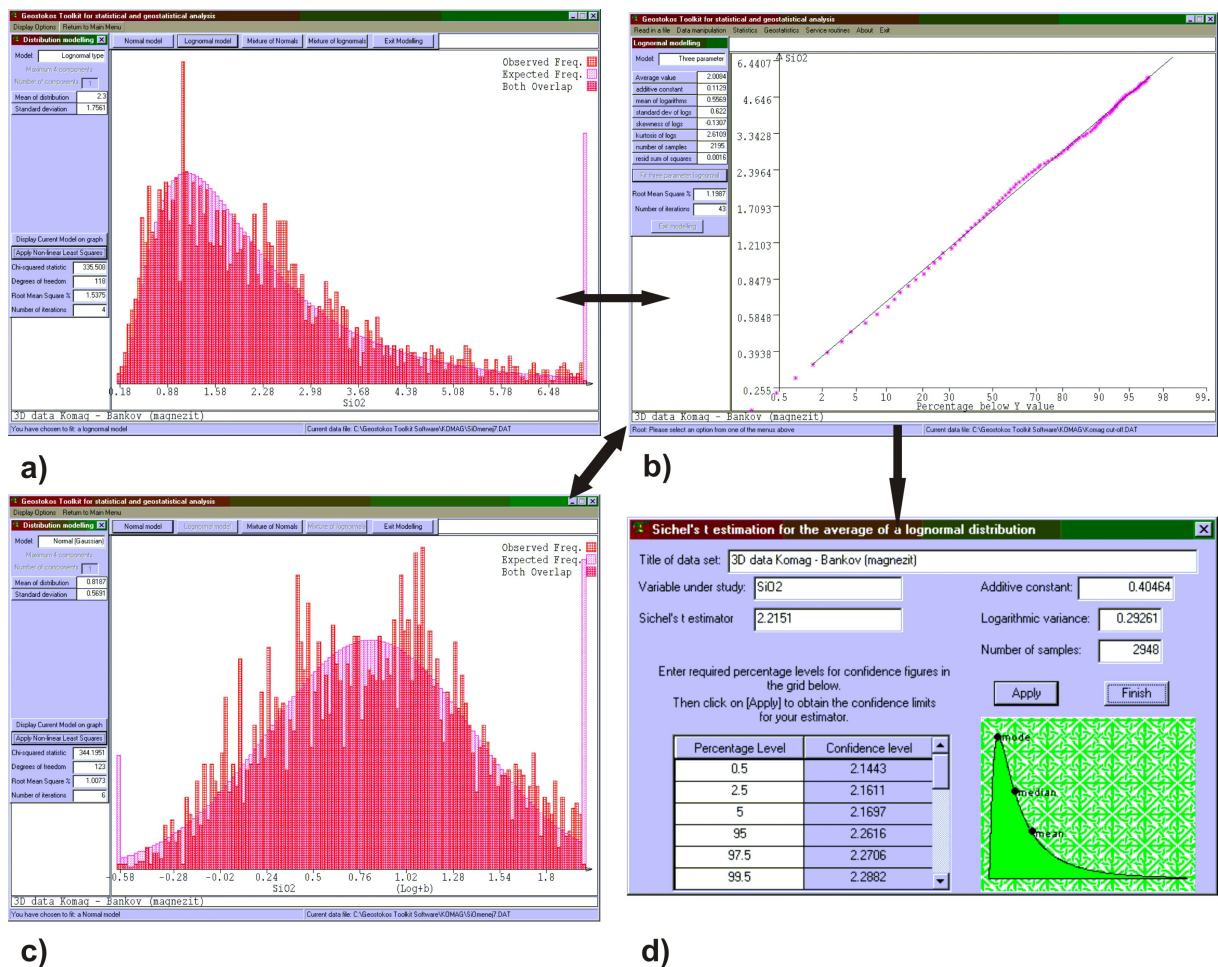
Zaujímavou črtou tohto programového prostredia je odhad a vizualizácia teoretických rozdelení početností metódou nelineárnych najmenších štvorcov na základe zvolenej normálnej alebo lognormálnej teoretickej distribúcie, resp. viacerých populácií podieľajúcich sa na výslednom rozdelení pravdepodobností. Na **Obr. 1** je uvedený príklad modelovania viackomponentovej distribúcie normálneho rozdelenia pre obsah MgO ťažobného sektora C s histogramom rozdelenia početností vykazujúceho silnú zápornú asymetriu a výskyt viacerých modulusov (**a**). Výsledný model (**b**) je zložený z troch populácií obsahu MgO na študovanej časti ložiska.

Pre vytvorenie modelu celkových zásob magnezitovej rudy na ložiskovej časti Bankov-Banisko v roku 2000/2001 boli použité výsledky chemických analýz z jadier povrchových vrtných, podzemných vrtných vejárov a zásekových vzoriek z obzorových chodieb. Silnou stránkou programového prostredia Geostokos Toolkit v rámci celkových odhadov zásob je spracovanie lognormálne rozdelených údajov chemických analýz, vrátane odhadu prídavnej konštanty (tretieho parametra) lognormálneho rozdelenia, Sichelov t -odhad priemeru lognormálnej distribúcie a transformáciu do normálneho

rozdelenia [14]. Na **Obř. 2** je zobrazený príklad logaritmickej transformácie údajov chemických analýz SiO_2 z ložiskovej časti Bankov-Banisko do normálneho rozdelenia na základe odhadu prídavnej konštanty: $\ln(\text{SiO}_2+b)$. V rámci spracovania tejto konkrétnej ložiskovej časti boli takýmto spôsobom spracované aj chemické analýzy obsahu CaO. Premenné obsahujúce údaje o chemických analýzach obsahov MgO a Fe_2O_3 boli spracovávané za predpokladu normálneho rozdelenia pravdepodobnosti bez potreby ich transformácie.



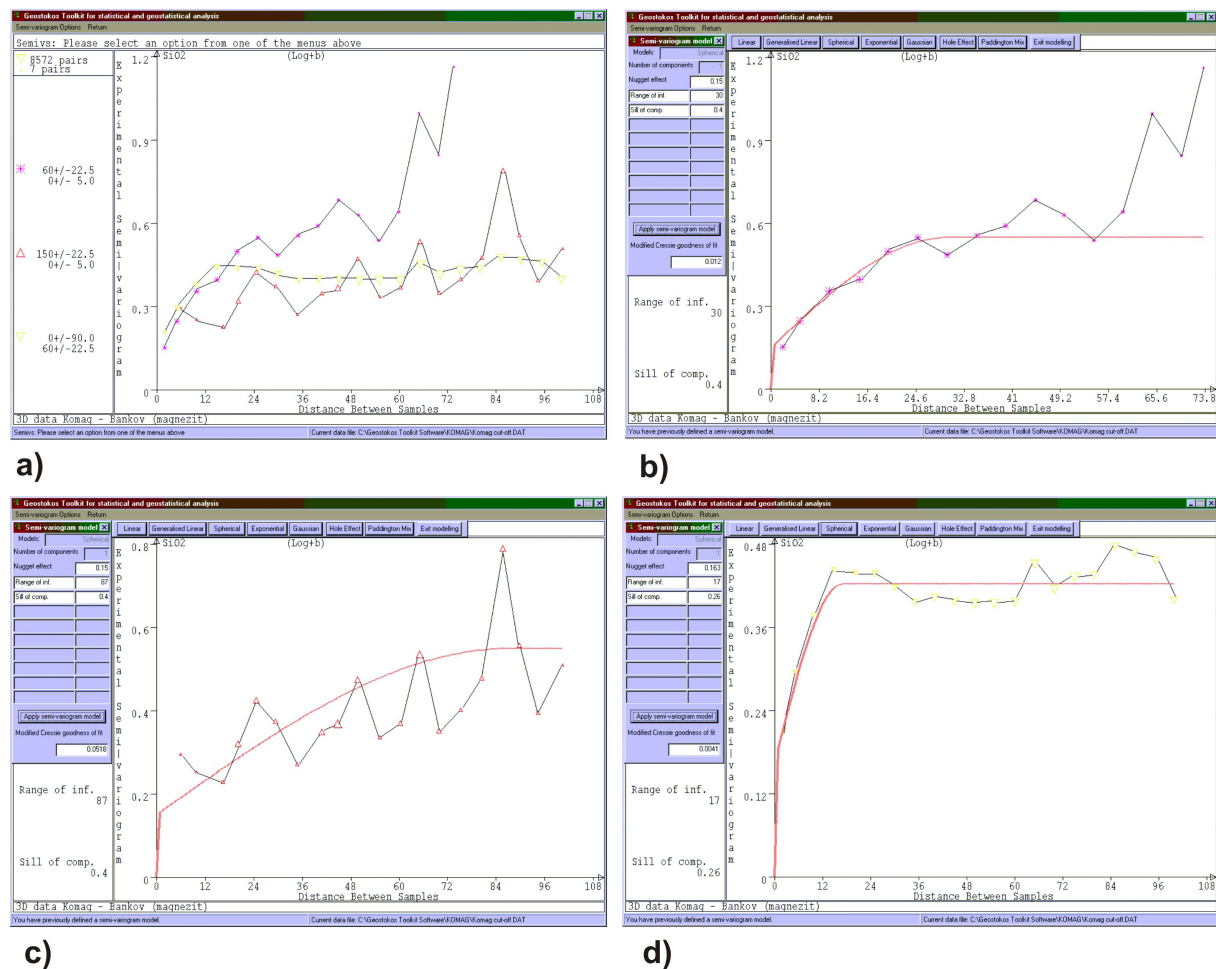
Obř. 1. Histogram rozdelenia početností obsahu MgO ťažobného sektora C (a) a nastavenie trojkomponentového modelu normálneho rozdelenia pravdepodobností (b).



Obř. 2. Lognormálna transformácia počiatočného rozdelenia chemických analýz SiO_2 ložiskovej časti Bankov-Banisko (a) do normálneho rozdelenia (c) na základe odhadu prídavnej konštanty (b) a výsledný odhad Sichelovho t -odhadu priemeru lognormálnej distribúcie pre rôzne intervaly spoľahlivosti (d).

Na **Obr. 3 a)** sú zobrazené smerové variogramy pre logaritmicke transformované hodnoty obsahu SiO_2 – dva smery v horizontálnej rovine a jeden vo vertikálnom smere. V horizontálnej rovine boli experimentálne variogramy počítané v smere ložiska (azimut 150°) a kolmom smere na hrúbky ložiskových polôh (azimut 60°). Na **Obr. 3 b), c)** a **d)** je zobrazený výsledný model variogramu zložený z hodnoty efektu zbytkového rozptylu (*nugget* efekt) a jednej sférickej štruktúry s dosahmi vplyvu 87 m v smere ložiska, 30 m v kolmom smere a 17 m v smere vertikálnom. V prostredí Geostokos Toolkit je možné nastavovať jednotlivé štruktúry buď manuálnym zadávaním ich parametrov (prah a dosah vplyvu) alebo v interaktívnom móde.

Experimentálne variogramy pre ostatné študované premenné boli počítané na základe rovnakých podmienok ako pre hodnoty premennej SiO_2 , a na tie boli následne nastavené príslušné modely regionalizácie.



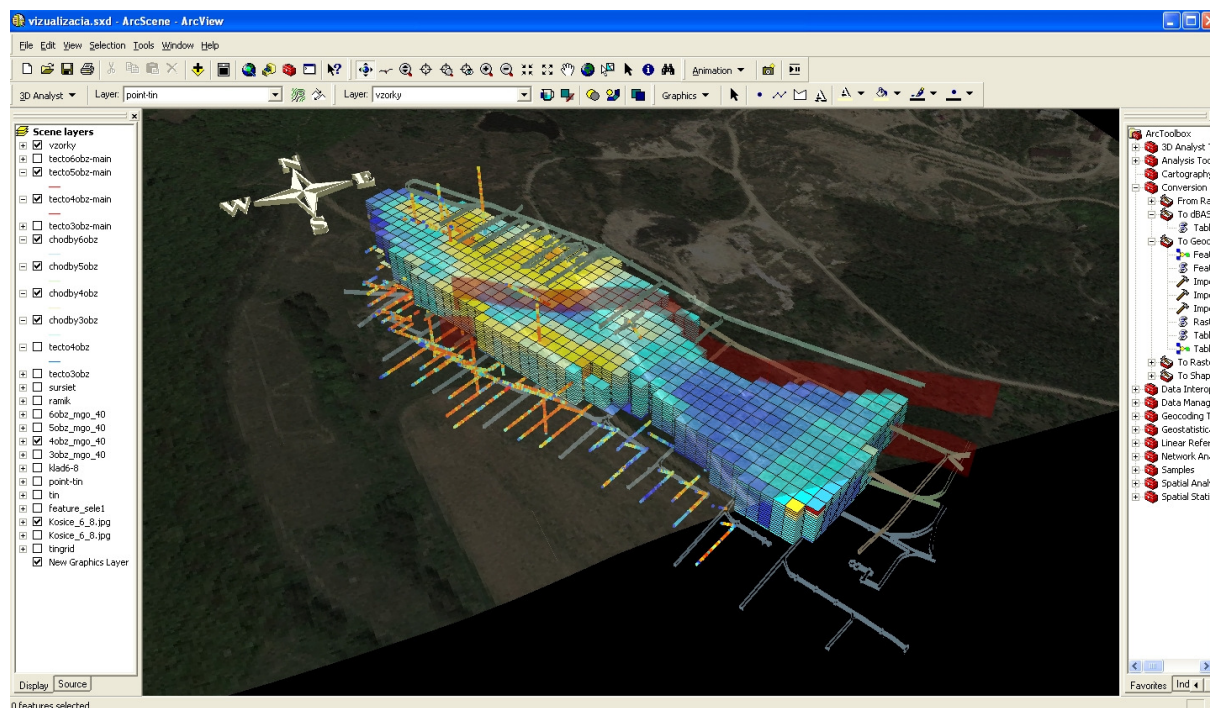
Obr. 3. Smerové experimentálne variogramy zlogaritmovaných hodnôt obsahov SiO_2 ložiskovej časti Bankov-Banisko (**a**) a nastavení anizotropného modelu variogramu v príslušných smeroch (**b, c, d**).

Výsledné modely odhadov celkových zásob jednotlivých zložiek magnezitovej rudy boli robené metódou bežného krigovania. V prípade SiO_2 a CaO bol použitý nelineárny prístup založený na logaritmickej transformácii počiatočných údajov do normálneho rozdelenia, následnej aplikácii lognormálneho krigovania a spätnej transformácii do počiatočného, lognormálneho rozdelenia a odčítaní prídavnej konštanty. V rámci krigovania boli odhadované priemerné hodnoty jednotlivých rudných zložiek pre veľkosti projektovaných ťažobných jednotiek 15×15 m pre výšku dobývacej lávky 3 m (tzv. blokovo kriging). Krigovanie bolo realizované po jednotlivých obzorochoch s výškou 50 m ohraničených na základe zdigitalizovaných geologických hraníc z bansko-geologických obzorových máp. V priebehu krigovania boli použité aj tektonické línie vo forme líniových objektov jednotlivých zlomových segmentov. Vrcholy týchto segmentov boli odčítané zo spomínaných obzorových máp. Nakoľko programové prostredie Geostokos Toolkit neumožňuje použitie zlomových plôch v 3D priestore, boli jednotlivé zlomy extrapolované na výšku obzoru. Výsledné odhady priemerných hodnôt

boli následne použité pre výpočet tonáží [t] na základe objemu ťažobnej jednotky (675 m^3) a príslušnej objemovej hmotnosti, a množstva kovu ako súčiny tonáže a príslušného odhadu [t].

Programové prostredie Geostokos Toolkit neobsahuje žiaden modul pre 3D vizualizáciu výsledkov a umožňuje len 2D vizualizáciu, resp. export výsledkov 2D modelovania do prostredia Surfer [23]. Vzhľadom k tejto skutočnosti boli výsledky modelovania ako aj vstupné údaje importované do prostredia ArcGIS-ArcScene, kde boli prepojené s ďalšími vstupmi ako sú banské diela, priebehy zlomových línií, topografia a iné (**Obr. 4**).

Poznámka. Pre úplnosť je potrebné uviesť, že nasledujúci školský rok 2002/2003 bol v rámci praktických cvičení z vyššie spomínaného predmetu *Modelovanie geologických systémov a procesov*, použitý pre odhad celkových zásob na rovnakom ložisku indikátorový prístup, kedy boli jednotlivé premenné nelineárne transformované do indikátorových hodnôt (0,1) na základe série bilančných podmienok platných na predmetnom ložisku v čase jeho exploatacie. Vzhľadom k rozsiahlosti celej tejto práce, a hlavne samotnej variografie jednotlivých premenných pre rôzne „cut-off“ nebude v tomto príspevku ďalej prezentovaná. Viac o aplikácii indikátorového krigovania v Geostokos Toolkit je v [15].

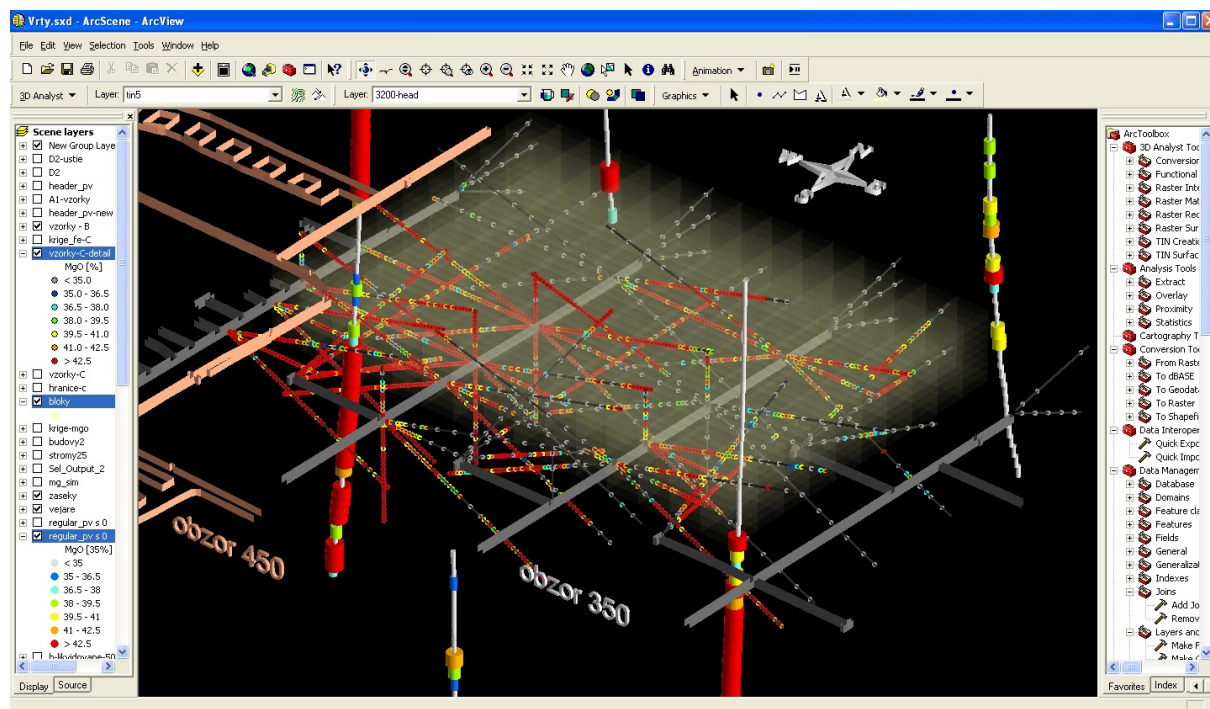


Obr. 4. Blokový model priestorového rozloženia obsahu MgO magnezitového zrudnenia na 4. obzore ložiska Bankov-Banisko vytvorený v prostredí Geostokos Toolkit vizualizovaný v prostredí ArcGIS-ArcScene.

Pre vytvorenie modelu celkových zásob pre ťažobný sektor C Mikovskej časti magnezitového ložiska Jelšava boli použité údaje o obsahoch MgO, Fe_2O_3 , CaO, SiO_2 a Al_2O_3 . Tieto údaje boli dostupné z výsledkov chemických analýz vrtných jadier zo 69 vrtovej vrtaných vo forme vrtných vejárov z chodieb a prekopov na úrovni 350 m n. m. v rámci ťažobného sektora C o rozmeroch 170 m po dĺžke a 250 m po šírke (generálne „zlatý“ smer S-J + azimut 7°). Vertikálne je ťažobný sektor C ohraničený obzorom na úrovni 350 m n. m. a vyšším obzorom na úrovni 400 m n. m. Projektované ťažobné jednotky, pre ktoré bol urobený odhad, mali rozmery 17×17 m na výšku lávky 4,5 m (1300.5 m^3 horniny). V smere X (V-Z) bolo naprojektovaných 15 a v smere Y (S-J) 10 ťažobných jednotiek (horizontálna sieť 15×10 blokov). Vo vertikálnom smere bolo naprojektovaných 11 ťažobných jednotiek, reprezentujúcich 11 ťažobných lávkov od úrovne 350 m n. m. do vrchu po úroveň 400 m n. m. Spolu tak vznikol blokový model o celkovej počte 1650 ťažobných jednotiek. Na **Obr. 5** sú zobrazené v prostredí ArcGIS-ArcScene pozície vrtných vejárov na obzore 350 spolu s transparentne zobrazenými projektovanými ťažobnými jednotkami v rámci ťažobného sektora C.

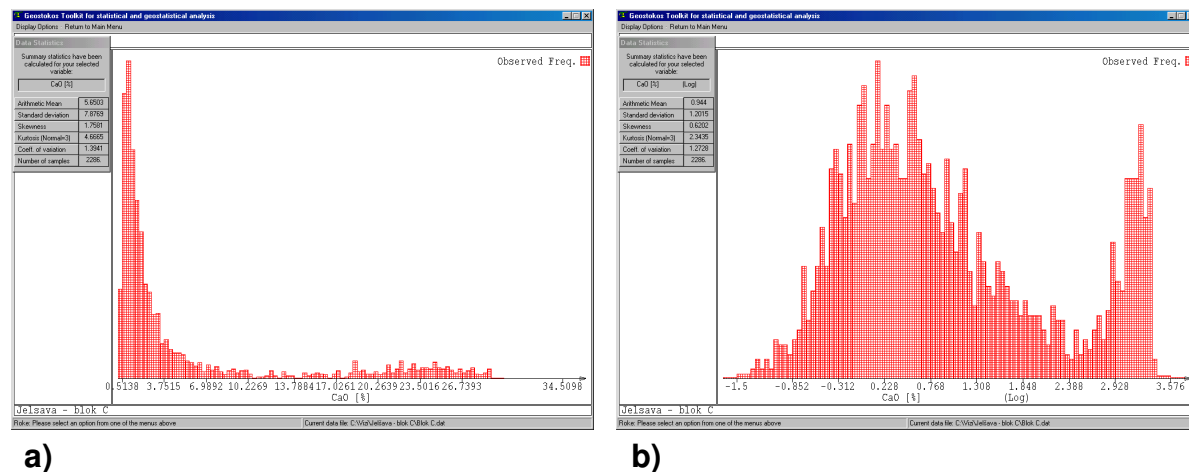
Poznámka. Aj keď sú na **Obr. 5** zobrazené aj priebehy povrchových vrtovej, údaje z nich neboli v čase modelovania celkových zásob ťažobného sektora C použité z dôvodu ich neposkytnutia.

Vzhľadom na to, že vrtné jadrá z prieskumu boli nerovnakých dĺžok (od 2 až 11 metrov) bolo prvým krokom štruktúrnej analýzy regularizovať na rovnakého nositeľa, tzv. support. Podľa dobývacej metódy boli vrtné jadrá regularizované na výšku lávky 4,5 m. Všetky ďalšie analýzy boli robené na týchto regularizovaných údajoch.



Obr. 5. Priestorová pozícia vrtov s dostupnými údajmi na obzore 350 spolu s projektovaným blokovým modelom pre odhad celkových zásob ťažobného sektora C vizualizované v prostredí ArcGIS-ArcScene.

V rámci modelovania celkových zásob na ťažobnom sektore C bol rovnako použitý princíp lineárneho prístupu v prípade MgO a Fe_2O_3 za predpokladu ich normálneho rozdelenia, resp. logaritmickej transformácie lognormálne rozdelených údajov premenných CaO , SiO_2 a Al_2O_3 . Na **Obr. 6 a)** je zobrazený ako príklad histogramu rozdelenia početností obsahu CaO študovaného ťažobného sektora C. Tento histogram vykazuje zjavné lognormálne rozdelenie s vysokými početnosťami nízkych hodnôt s dlhým "chvostom" prechádzajúcim do hodnôt vysokých vpravo od priemernej hodnoty (5,65 % CaO). Vysoká hodnota vypočítanej štíhlosti naznačuje viacvrcholové rozdelenie obsahu CaO , čo je možné pozorovať na vynesenom experimentálnom histograme. Na **Obr. 6 b)** je zobrazený príslušný histogram zlogaritmovaných hodnôt CaO ($\ln CaO + 0$), ktorý vykazuje zjavné dvojvrcholové rozdelenie početností. Vzhľadom k vysokej zápornej korelácii s hodnotami MgO (-0,9822) by malo byť toto rozdelenie trojvrcholové. Z uvedeného vyplýva, že logaritmická transformácia v mnohých praktických prípadoch nie je dostatočná, hlavne v prípade viacvrcholových rozdelení z dôvodu maskovania minoritných populácií. Na druhej strane však je v tomto prípade zložité oddeliť jednotlivé populácie, nakoľko hranice jednotlivých populácií nie sú stanovované na základe geologických podmienok stavby ložiska, ale bilančných podmienok ťažby.

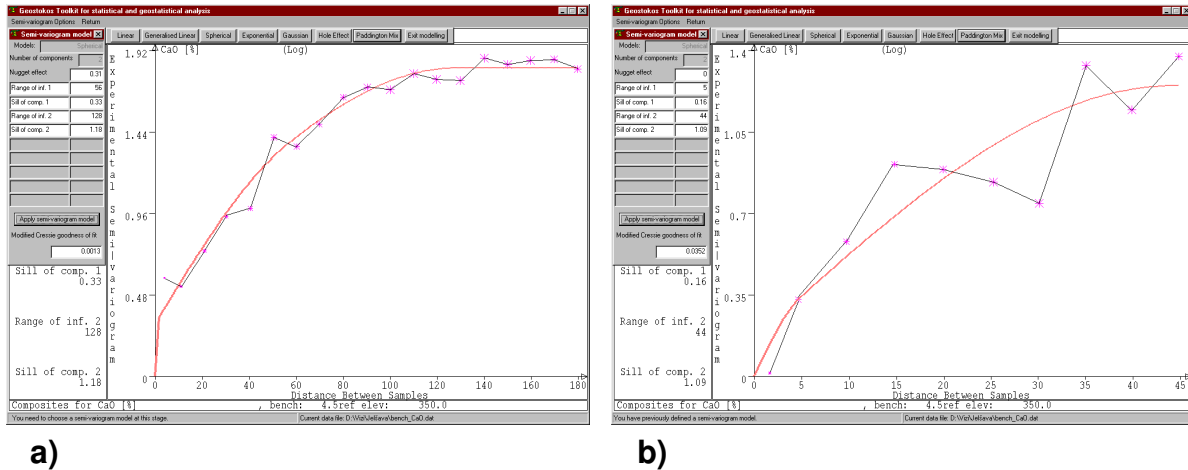


a)

b)

Obr. 6. Histogram rozdelenia početností obsahu CaO ťažobného sektora C (a) a príslušný histogram rozdelenia početností logaritmov obsahu CaO ($\ln CaO$) (b).

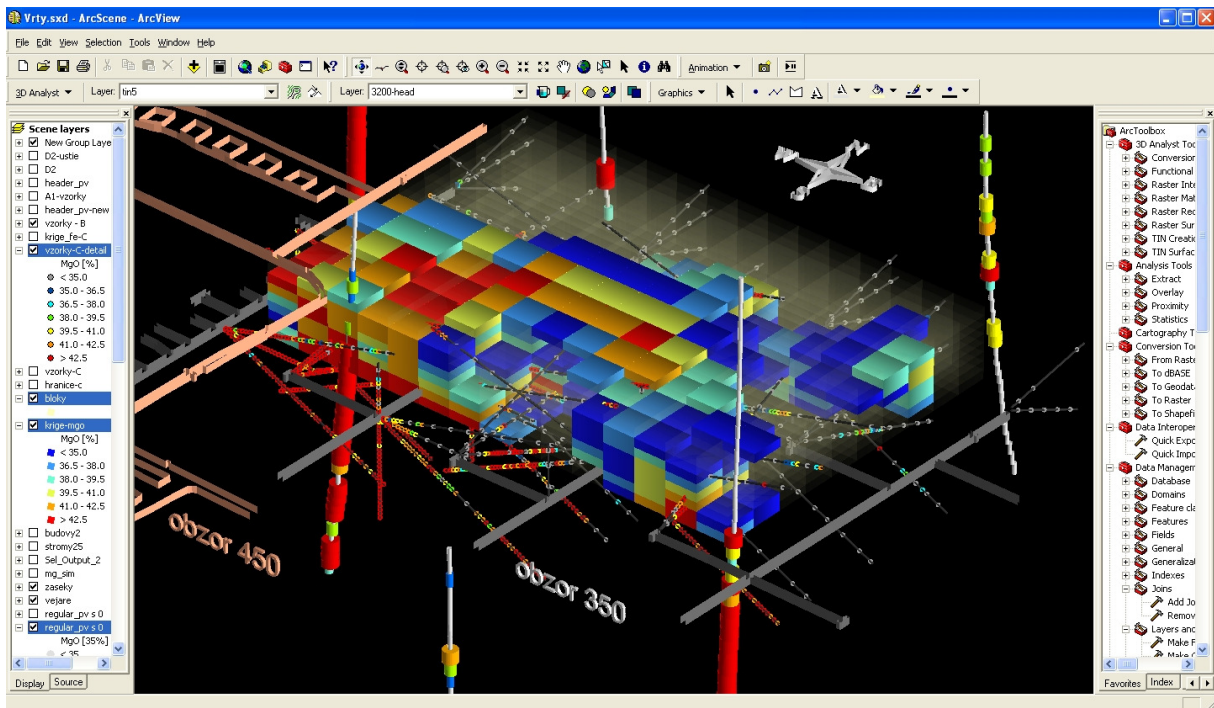
Na **Obr. 7** sú zobrazené experimentálne variogramy logaritmov CaO spolu s nastavenými teoretickými modelmi. Nakoľko sa na horizontálnych experimentálnych smerových variogramoch neobjavuje výrazná anizotropia boli vypočítané experimentálne variogramy pre horizontálnu rovinu (**Obr. 7 a**) a vertikálny smer (**Obr. 7 b**). Na tieto bol nastavený model regionalizácie zložený z hodnoty efektu zbytkového rozptylu a dvoch sférických štruktúr s dosahmi vplyvu 45 m a 128 m v horizontálnej rovine a 5 m a 44 m vo vertikálnom smere čo dávalo anizotropný pomer 11,2 a 2,91.



Obr. 7. Experimentálny variogram a nastavený model variability logaritmu obsahu CaO ťažobného sektora C pre horizontálnu rovinu (**a**) a vo vertikálnom smere (**b**).

Rovnakým spôsobom boli analyzované aj premenné ďalších obsahov a výsledné modely variogramov boli použité pre odhad priemerných hodnôt ťažobných jednotiek a následný výpočet zásob. V prípade SiO_2 a Al_2O_3 bol použitý nelineárny prístup založený na logaritmickom transformácii a blokovom lognormálnom krigovaní. V prípade MgO a Fe_2O_3 bolo použité bežné blokové krigovanie. Výpočet zásob bol realizovaný rovnako ako v predchádzajúcom prípade na ložiskovej časti Bankov-Banisko.

Na **Obr. 8** je ako príklad zobrazený v prostredí ArcGIS-ArcScene výsledný blokový model priestorovej distribúcie obsahu MgO v ťažobnom sektore C nad hodnotu obsahu 35 %.



Obr. 8. Výsledný blokový model celkových zásob magnezitovej rudy na ťažobnom sektore C vytvorený v prostredí Geostatistical Wizard vizualizovaný v prostredí ArcGIS-ArcScene.

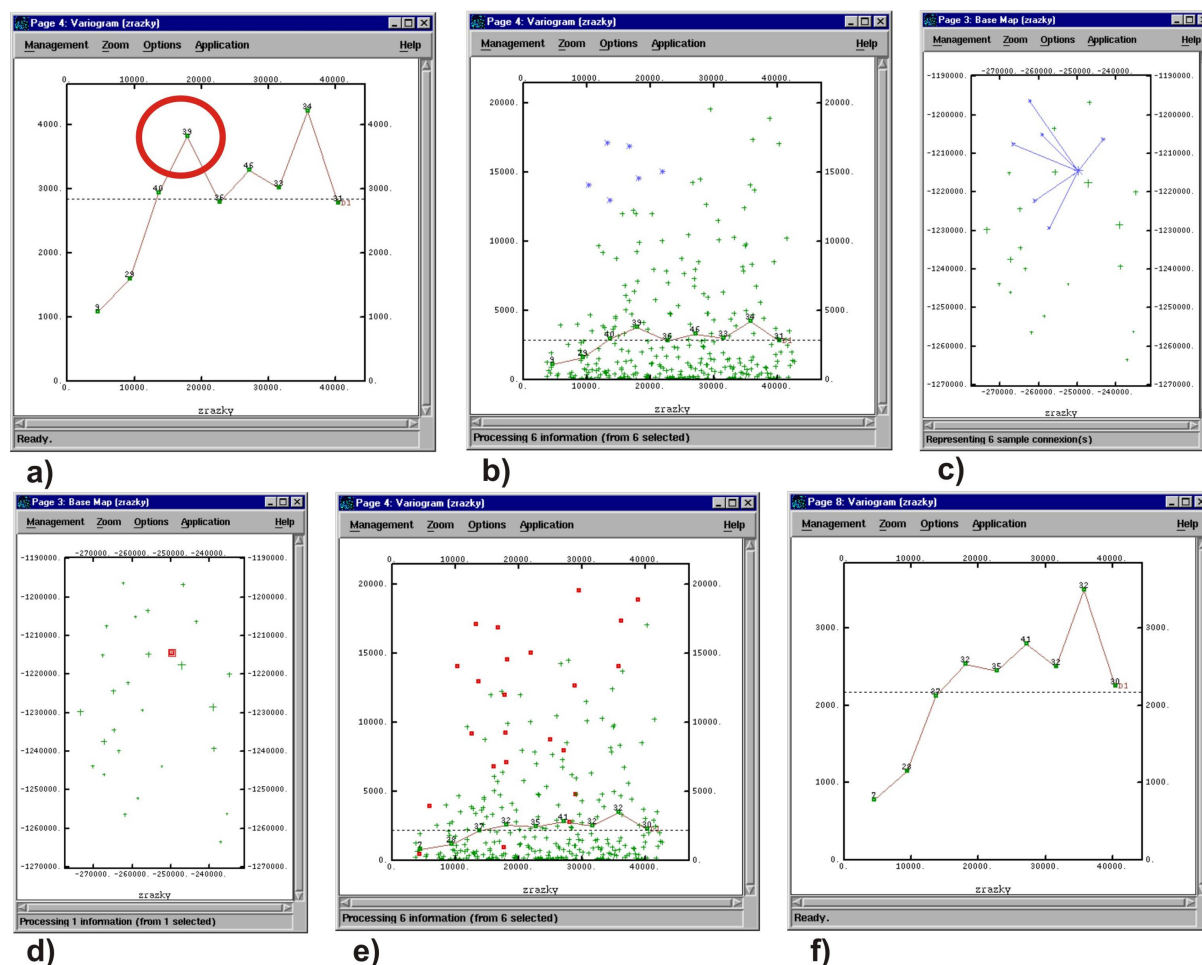
4 Príklady geoštatistického modelovania v prostredí Isatis

Programové prostredie Isatis Geovariances [24] je bezpochybné lídrom v oblasti geoštatistického modelovania pre akékoľvek oblasti aplikácie. Hlavnými oblasťami záujmu vývojárov tohto programu je okrem banského priemyslu aj ropný priemysel a aplikácie v životnom prostredí.

Prostredie Isatis je určené skúseným užívateľom s veľmi dobrým geoštatistickým vzdelaním s možnosťou nastavenia úrovne užívania v preferenciách. Pružnosť tímu vývojárov zabezpečuje neustále dopĺňanie a zdokonaľovanie jednotlivých geoštatistických metód a techník na rozdiel od modulov geoštatistického modelovania obsiahnutých v integrovaných „štandardných“ programových prostredí ako je napr. ArcGIS (ESRI), Datamine (MICAL), Vulcan (Maptek) a iné. Isatis umožňuje prácu s rozdielnymi údajovými zdrojmi a umožňuje import/export z/do rozličných formátov vrátane vyššie uvedených programových prostredí.

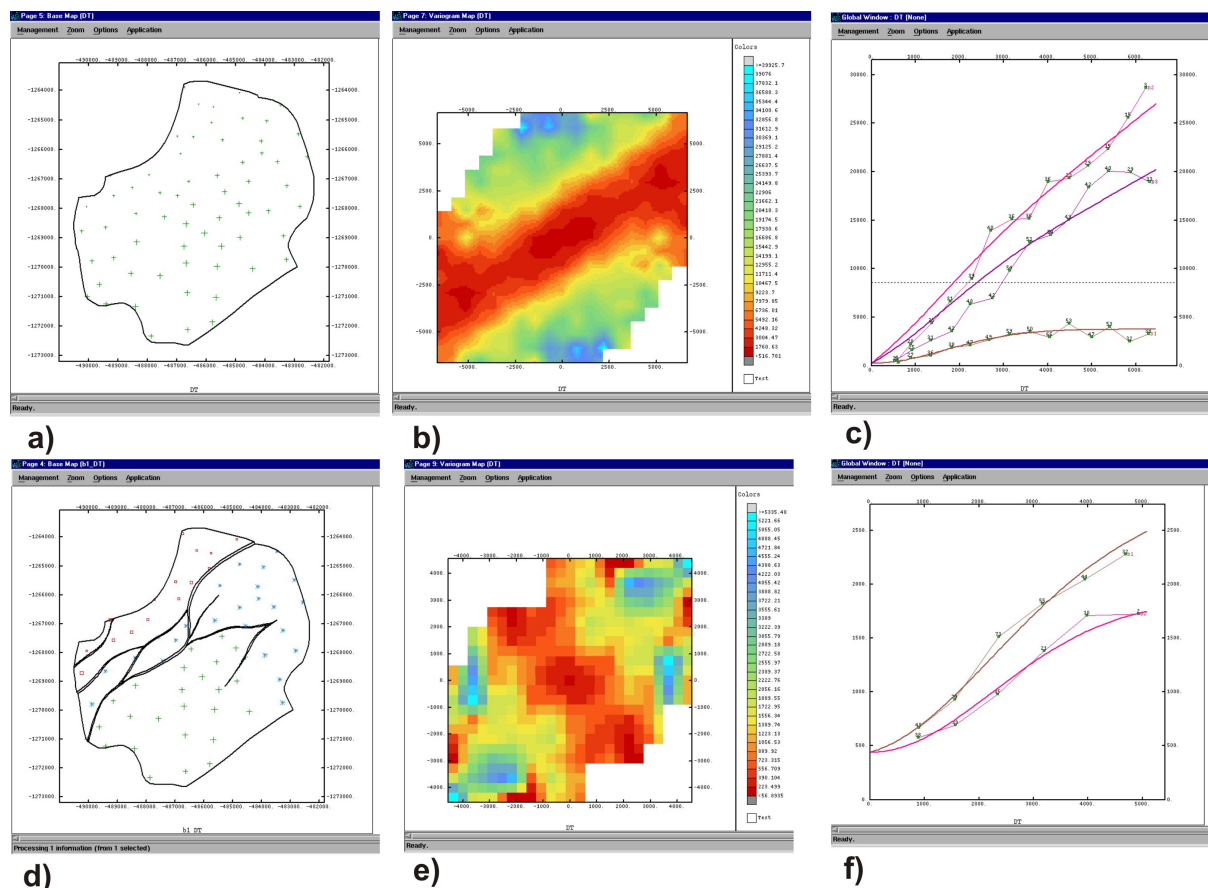
Isatis poskytuje najlepšie interaktívne analýzy 2D a 3D údajov pre geológov a banských inžinierov založené na exploratívnej analýze údajov, geoštatistickej štruktúrnej analýze a variografii jednej alebo viacerých premenných pre najširšie spektrum základných štruktúr variogramov, ako aj mnohé odhadovacie techniky (jednoduché a bežné krigovanie a kokrigovanie, indikátorové krigovanie, disjunktívne krigovanie a rovnomerné podmieňovanie) a stochastické kondičné simulácie.

Silnou stránkou prostredia Isatis je dynamické prepojenie jednotlivých grafických okien (mapa vzoriek, korelačný graf, h -korelačný graf vzdialeností, Q-Q graf, histogram, mapa variogramu a variogram), čo znamená, že akékoľvek označenie alebo maskovanie jedného alebo viacerých údajov sa prejaví automaticky na všetkých ostatných oknách. Na **Ob. 9** je zobrazený ilustratívny príklad úpravy eratického priebehu experimentálneho variogramu (**a**) označením párov na variomraku, s vysokou variabilitou na príslušnej vzdialenosti (**b**) a zobrazenie týchto párov na mape vzoriek (**c**). Maskovaním extrémnej hodnoty (**d**) sú maskované aj všetky príslušné páry (**e**) čím je upravený výsledný priebeh experimentálneho variogramu (**f**).



Ob. 9. Príklad dynamického prepojenia grafických okien v prostredí Isatis pri identifikácii extrémnej hodnoty vplyvajúcej na priebeh experimentálneho variogramu.

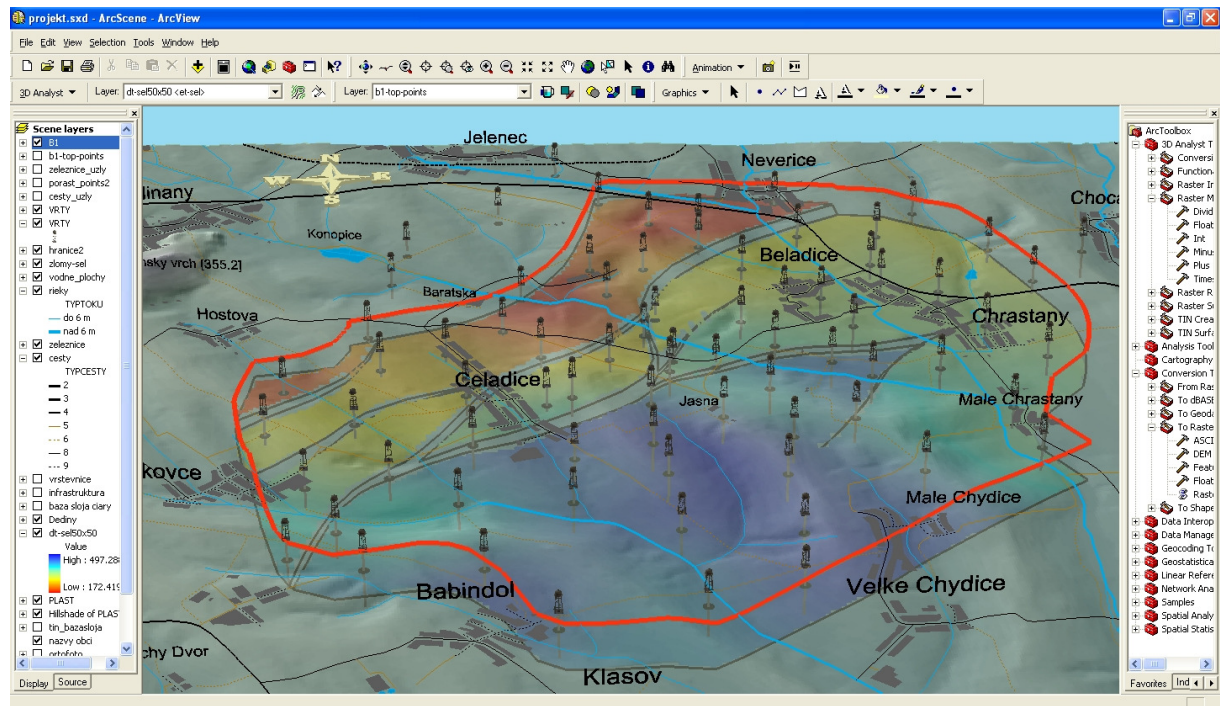
Prostredie Isatis umožňuje zavedenie 2D a 3D systému zlomov nie len do procesu odhadov a simulácií, ale tiež do variografie pri výpočte experimentálnych variogramov a následnom modelovaní výsledného variogramu. Na **Obr. 10** je zobrazený príklad vplyvu zavedenia 2D systému zlomov pri modelovaní variogramu údajov hĺbky uhoľného sloja b1 Beladice z vrtného prieskumu. Horný rad obrázkov (**a**), (**b**) a (**c**) zobrazuje výsledok variografie bez zavedenia systému zlomov, pričom si je na mieste všimnúť silnú zonálnu anizotropiu s výraznou kontinuitou variability v smere približne SV-JZ. Dolný rad obrázkov (**d**), (**e**) a (**f**) znázorňuje zmenu situácie v prípade zavedenia systému poklesov, pričom sa mení zonálna anizotropia s rotáciou o takmer 90°, s kontinuitou variability v smere približne SZ-JV. Takáto zmena výrazne vplýva na výsledky priestorovej interpolácie priebehu a geometrie študovaného sloja, ktoré sú uvedené v [16].



Obr. 10. Vplyv zavedenia systému zlomov do výpočtu smerových experimentálnych variogramov a modelovania regionalizácie v prostredí Isatis na príklade priebehu bazálneho uhoľného sloja b1 Beladice.

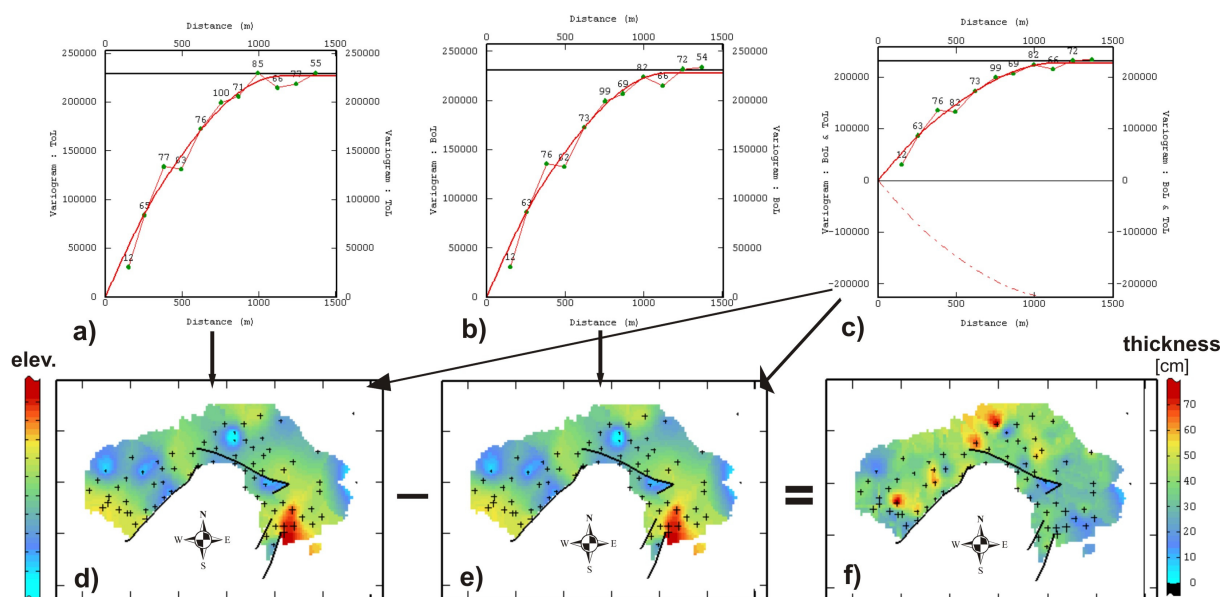
Na **Obr. 11** je pre ilustráciu zobrazený výsledok 3D priebehu sloja v prostredí ArcGIS-ArcScene. Uhoľný sloj je umiestnený pod DMT nad študovaným územím označeným červeným polygónom, spolu s vyznačením jednotlivých prvkov ako sú obce, cesty, atď. Na povrchu sú rovnako vynesené prieskumné vrty s vyznačením polohy uhoľného sloja. Samotný sloj je kolorovaný v červeno-modrej škále od najmenej hĺbky uloženia sloja po najväčšiu.

Multivariačné techniky modelovania, od jednoduchého a bežného kokrigingu až po techniky ako je krigovanie s externým driftom, krigovanie s lokálne meniacim sa priemerom, kolokačný kokriging alebo jeho Markov-Bayesova aproximácia, obsiahnuté v prostredí Isatis zabezpečujú kvalitné výsledky v zmysle zachovania inherentnej korelácie medzi premennými nie v zmysle štatistickom ale geologickom. Na **Obr. 12** je zobrazený príklad modelovania hlavného Mn sloja ložiska Kišovce-Svábovce. Na základe vrtného prieskumu je zistené, že hrúbka tohto sloja sa pohybuje od 10 do 80 cm. Údaje premennej hrúbky boli zle štrukturované a výsledný model korešpondoval s takmer čistým nugget efektom. Použitie takého modelu malo za následok spriemerňovanie hodnôt v rámci účinného okolia odhadu a výsledkom bol vyhladená mapa hrúbky študovaného sloja. Nakoľko je sloj plošne rozšírený na takmer 18 km² a je tektonicky porušený, neposkytuje model hĺbky stropu a bázy študovaného sloja pri uvedených pozorovaných hrúbkach spoľahlivé výsledky, a v rozdieloch modelov stropu a bázy sa objavujú záporné hodnoty hrúbok.



Obr. 11. 3D zobrazenie modelu hĺbky uhoľného sloja b1 Beladice v prostredí ArcGIS-ArcScene.

Pre získanie mapy hrúbky bol preto, vzhľadom k vysokej korelácii medzi priebehom stropu a bázy sloja, použitý multivariačný prístup, ktorý bol založený na vzájomnej (cross) variografii týchto dvoch regionalizovaných premenných. Výsledkom tejto variografie bol tzv. *lineárny model koregionalizácie* (Obr. 12 a, b) a c)). Na obrázkoch a) a b) sú príslušné variogramy elevácií stropu a bázy sloja. Variogramy sú zložené z dvoch sférických štruktúr bez hodnoty nugget efektu a objavujú sa aj na ich vzájomnom, tzv. cross-variograme na obrázku c). Na základe tohto modelu bol urobený odhad priebehu stropu a bázy sloja, ktorých rozdiel dával model hrúbky ktorý bol v každom bode siete väčší ako 0 (Obr. 12 d, e) a f)). Na obrázkoch d) a e) sú zobrazené výsledné modely elevácie stropu a bázy sloja. Na obrázku f) je výsledný model hrúbky sloja ako rozdiel modelov stropu a bázy, ktorý rešpektuje experimentálne hodnoty hrúbok z vrtného prieskumu. Kompletná geoštatistická analýza spolu s odhadom celkových zásob Mn na tomto ložisku je v uvedená v [17].

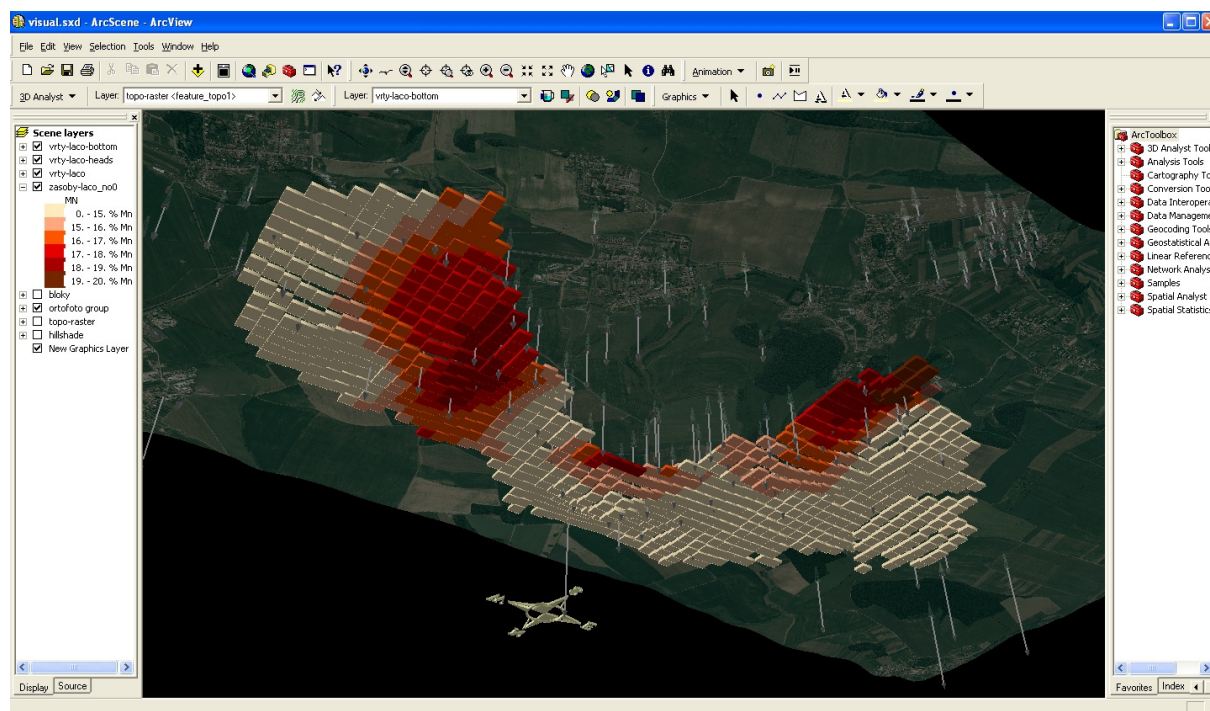


Obr. 12. Modelovanie inherentnej korelácie elevácie stropu a bázy sloja s výslednou hrúbkou väčšou ako 0 v prostredí Isatis na základe lineárneho modelu koregionalizácie a následného kokrigingu.

K vyššie uvedenému príkladu je ešte na mieste poznamenať, že na základe separátneho krigingu založenom len na príslušných variogramoch stropu a bázy sloja nebolo možné získať výslednú hrúbku, ktorá by rešpektovala podmienku „nezápornosti“ hodnôt hrúbky sloja vzhľadom k jej nízkym experimentálnym hodnotám v porovnaní s plošným rozšírením sloja a riedkej hustote prieskumných vrtov (označené krížikmi na modeloch **d**), **e**) a **f**) **Obr. 12**

Poznámka. Taktiež je potrebné na okraj uviesť, že redukciou lineárneho modelu koregionalizácie na tzv. *intrinzičný model* (redukcia viacerých vložených štruktúr na jednu pri vysokej korelácii medzi študovanými premennými a ich izotopickej konfigurácii údajov na študovanom území) je možné získať podobné ale vyhladenejšie výsledky aj na základe krigingu. Podrobne o porovnaní týchto modelov ako aj ďalších multivariačných prístupov je možné nájsť v [18].

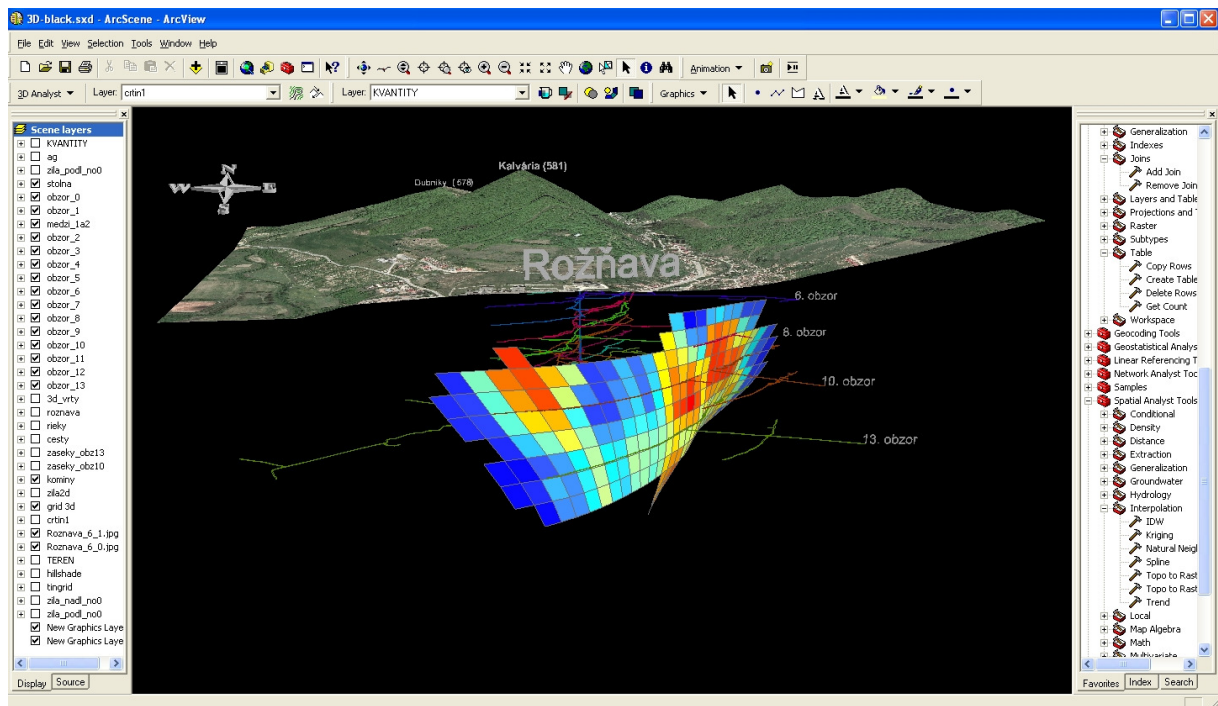
Na **Obr. 13** je zobrazený výsledok modelovania Mn sloja Kišovce-Švábovce v 3D zobrazení v prostredí ArcGIS-ArcScene, s farebným rozlíšením na základe priestorovej distribúcie obsahu Mn na študovanom sloji, ktorého priestorová geometria bola riešená na základe vyššie popísaného postupu.



Obr. 13. 3D zobrazenie v ArcGIS-ArcScene priestorovej geometrie Mn sloja Kišovce-Švábovce so zobrazením priestorovej distribúcie obsahu Mn vytvorené v prostredí Isatis (pohľad zospodu).

Na **Obr. 14** je zobrazený podobný príklad modelovania geometrie v 3D priestore. Obrázok znázorňuje výsledný model priebehu tetraedritovej žily Strieborná v rožňavskom rudnom poli. Žila Strieborná bola overovaná banskými slednými chodbami na obzoroch 13, 10 a 8. Jej celkový overený smerný rozsah je 1300 m so sklonom 75 až 85° k JV v JZ časti, v centrálnej časti je takmer zvislá a smerom na SV sa jej sklon postupne znižuje na 65° k SZ. Z uvedeného vyplýva, že žila má pomerne komplikovanú morfológiu pripomínajúci "vrtulovitý" tvar [8]. Pre modelovanie jej tvaru boli použité horizontálne obzorové mapy, na ktorých bol zakreslený priebeh žily na základe jej prieskumu. Rovnako boli použité aj vertikálne rezy I-I', I-II', IV-IV' a V-V', ktoré boli zostrojené na základe priesekov žily s banskými dielami a prieskumnými vrtmi. Zdigitalizované priebehy žily boli následne rotované do lokálneho súradnicového systému a síce tak, aby pôvodne strmo uklonená žila predstavovala kvázi horizontálnu vrstvu definovanú svojimi nadložnými a podložnými kontaktmi s okolitou horninou. Na základe takejto transformácie boli odčítavané X a Y-ové súradnice v lokálnom súradnicovom systéme pozdĺž žily s krokom 10 m. Tieto odpočty predstavovali akési virtuálne prieseky žilou definované lokálnou Z_1 súradnicou kontaktu žily s nadloží, a Z_2 súradnicou kontaktu žily s podloží. Rozdiel týchto Z-ových súradníc dával nepravú hrúbku žily. Takto bol vytvorený vstupný súbor pre následné modelovanie morfológie žily Strieborná. Vstupný súbor teda obsahoval identifikáciu prieseku na príslušnom horizontálnom alebo vertikálnom reze, jeho X a Y-ové súradnice v lokálnom súradnicovom systéme a premenné predstavujúce Z-ové súradnice kontaktu žily s nadloží a podloží a jej nepravú hrúbku. Samotné modelovanie morfológie žily bolo robené v prostredí Isatis. Vzhľadom k zjavnému nestacionárnemu správaniu sa premenných Z_1 a Z_2 nebolo možné vytvoriť ich spoločný model

koregionalizácie a využiť ich vzájomnú koreláciu. Z tohto dôvodu bol vytvorený model geometrie žily Strieborná na základe simulácie premennej Z_1 . Premenná Z_2 bolo získaná ako rozdiel premennej Z_1 a simulovanej nepravej mocnosti. Priestorový model premennej Z_1 bol namodelovaný metódou IRF-k (Intrinsic Random Function of k-order – intrinická náhodná funkcia k-tého rádu), pričom bol nastavený generalizovaný lineárny model kovariancie s kvadratickým driftom, vyplývajúcim zo samotného tvaru žily Strieborná, s hlavnou osou anizotropie v smere žily. Z dôvodu komplexnej experimentálnej distribúcie a nulových hrúbok žily boli dostupné dáta najprv transformované do normálneho, Gaussovho rozdelenia. V tomto Gaussovom priestore bol vytvorený výsledný model priestorovej variability. Následné simulácie založené na tomto modeli boli spätne transformované do pôvodného priestoru. Cieľom simulácií bola reprodukcia pôvodného, experimentálneho rozdelenia ako aj model priestorovej variability – variogramu. Vytvorených bolo 100 simulácií na sieti 5x5 m, ktoré boli následne spriemerované pre panely 50x50 m. Takto spriemerované simulácie pre panely 50x50 m boli následne spriemerované do jednej, priemernej simulácie. Výsledkom tohto modelovania bol trojrozmerný model geometrie žily Strieborná pre potreby jej zobrazenia v trojrozmernom priestore.



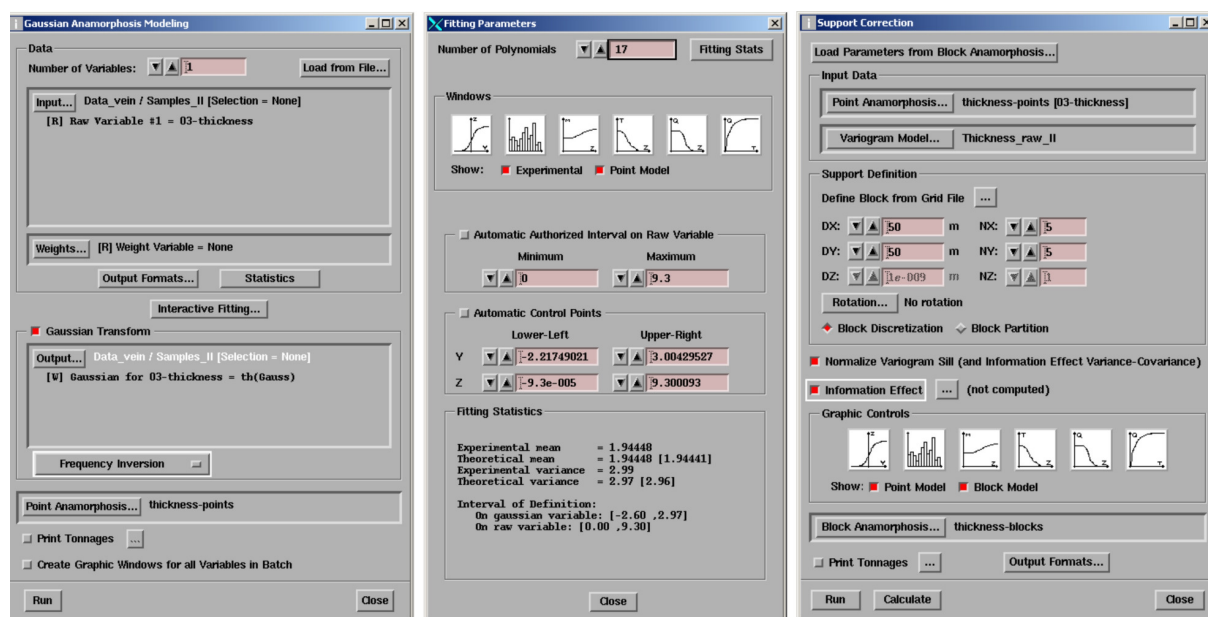
Obr. 14. 3D pohľad na priestorový priebeh tetraedritovej žily Strieborná v rožňavskom rudnom poli zobrazený v ArcGIS-ArcScene.

Najsilnejšou a najprepracovanejšou črtou prostredia Isatis pre banské aplikácie a prax je modelovanie lokálnych vyťažiteľných zásob ložísk ťžitkových nerastov. Prostredie Isatis umožňuje v rámci modelovania vyťažiteľných zásob nasledujúce:

- analýza a kontrola vstupných údajov v interaktívnom móde,
- odhad vyťažiteľných zásob použitím multivariačného modelovania a klasifikácia zásob,
- integrácia komplexných geologických modelov,
- analýza citlivosti modelu zásob pri zmene veľkosti ťžitobných jednotiek alebo bilančných podmienok,
- ohodnotenie variability, nespoľahlivosti a riziku modelu zásob na základe stochastických simulácií,
- optimalizácia rozmiestnenia prieskumných vrtov,
- automatická aktualizácia modelov vyťažiteľných zásob na základe nových údajov,
- uľahčenie kontroly a umožnenie archivácie projektov.

Vyťažiteľné zásoby ložísk ťžitkových nerastov sú v prostredí Isatis modelované nelineárnymi metódami ako je lognormálne krigovanie, indikátorové krigovanie, disjunktívne krigovanie, rovnomerné podmieňovanie, pre zadanú sériu meniacich sa bilančných podmienok ťžby (cut-off). Na základe simulácií vstupných údajov obsahov ťžitkových alebo škodlivých prvkov študovaného zrudnenia je možné na základe interaktívneho post-procesingu a protokolov získať výsledky pre akékoľvek cut-off.

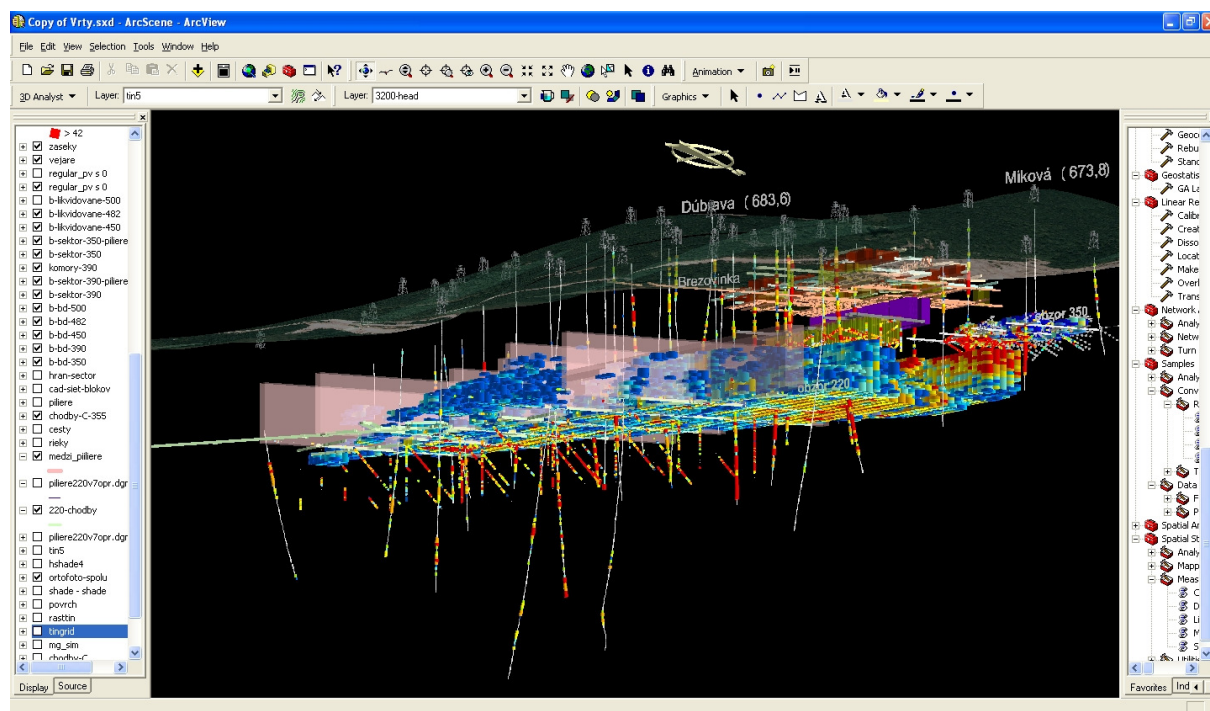
Všetky metódy odhadov a simulácií sú založené na modelovaní bodovej Gaussovej anamorfózy vstupnej experimentálnej distribúcie expanziou Hermitových polynómov. Tento model anamorfózy následne podlieha korekcii objemu pre projektované veľkosti ťažobných jednotiek a blokov v rámci týchto jednotiek za predpokladu permanencie normálneho rozdelenia pravdepodobnosti bez ohľadu na veľkosť nositeľa informácie, tzv. supportu (**Obr. 15**). Ťažobné jednotky zodpovedajú objemom, na základe ktorých sa robí selekcia medzi rudou a jalovinou pre danú bilančnú podmienku, a bloky zodpovedajú napr. postupu ťažby v rámci ťažobnej jednotky. Na základe týchto blokov je odhadovaný podiel rudy nad danú bilančnú podmienku a príslušná kovnosť. Na základe modelov anamorfózy sú výsledné modely transformované do počiatočného rozdelenia a takýmto postupom sú následne získané kompletne krivky selektivity, v praxi známe ako krivky kovnosť/tonáž. Okrem toho je možné do modelovania zahrnúť aj tzv. informačný efekt o budúcom rozmiestnení dovrchných vrstiev v dobývacom priestore, na základe ktorých sa robí finálne rozhodnutie o selekcii určitej ťažobnej jednotky a jej zaradení do produkcie buď priamo do úpravne alebo na skládku, resp. jej vyradenie z produkcie. V prípade preferenčného vzorkovania je možné v prostredí Isatis vypočítať deklačtračné váhy pre korekciu vychýlenia experimentálnej distribúcie rôznymi metódami ako je metóda polygónu vplyvu, metóda krigovacích váh, metóda statickej siete alebo metóda kízavého okna [6].



Obr. 15. Modelovanie Gaussovej anamorfózy a korekcia supportu v prostredí Isatis.

Ako príklad modelovania vyťažiteľných zásob v prostredí Isatis bude stručne uvedená prípadová štúdia na ložisku Strieborná. Okrem vytvorenia modelu priebehu žily Strieborná v 3D priestore bol urobený aj odhad vyťažiteľných zásob a kriviek selektivity pre premenné obsahov jednotlivých chemických analýz pre panely 50x50 m. Vyťažiteľné zásoby žily Strieborná boli modelované metódou rovnomerného podmieňovania na základe výsledkov krigovania jednotlivých premenných na paneloch 50x50 m v dvojrozmernom priestore reprezentujúcom vertikálny priemet žily. Krigované odhady boli získané na základe koregionalizácie prvkov Ag, Cu, Sb a Hg, reprezentujúcich tetraedritové zrudnenie, a prvkov Fe a Mn, reprezentujúcich sideritové zrudnenie. Pre premennú SiO₂ a pravú mocnosť boli vytvorené samostatné modely variogramov, nakoľko tieto premenné nemajú žiaden korelačný vzťah k vyššie spomínaným premenným. Na základe týchto modelov regionalizácií a koregionalizácií boli namodelované pre všetky študované premenné Gaussove anamorfózy s korekciou na veľkosti 5x5 m, reprezentujúcimi postup ťažby, a pre panely 50x50 m, reprezentujúcimi selektívne jednotky ťažby. Výsledkom odhadov vyťažiteľných zásob jednotlivých premenných je súbor premenných reprezentujúcich priemer, kovnosť a tonáž pre každý odhadnutý panel 50x50 m pre sériu vopred definovaných bilančných podmienok ťažby, reprezentujúcich alternatívny výpočet zásob. Pre pravú mocnosť bola použitá len jedna bilančná podmienka minimálnej pravej hrúbky žily a to 1 m. Ďalším príkladom aplikácie použitia nelineárneho prístupu k odhadom a simulácii vyťažiteľných zásob pre danú sériu bilančných podmienok je vytvorenie takéhoto numerického modelu pre spoločnosť SMZ, a.s. na novootváranom obvode na úrovni 220 m n.m magnezitového ložiska Jelšava. Model bol robený pre ťažobné jednotky 16x16 m pre výšku dobývacej lávky 6 m, pre obsahy MgO, CaO, Fe₂O₃ v rámci multivariačného prístupu a samostatne pre obsah SiO₂. Vytvorený numerický model bol

následne importovaný do ložiskového GIS systému MineGIS [9], špeciálne vytvoreného pre podmienky SMZ, a.s. Kompletný popis geoštatistického modelovania je zosumarizovaný v [19]. Na Obr. 16. je zobrazený výsledný model priemernej simulácie obsahu MgO pre uvedené ťažobné jednotky na obvode 220 magnezitového ložiska Jelšava v prostredí ArcGIS-ArcScene.



Obr. 16. 3D vizualizácia v prostredí ArcGIS-ArcScene výsledku numerického modelu priemernej simulácie obsahu MgO na obvode 220 magnezitového ložiska Jelšava vytvorenej v prostredí Isatis.

5 Záver

V príspevku sú predložené rôzne prípadové štúdie modelovania z oblasti geológie a baníctva, ktoré boli vypracované v špecializovaných geoštatistických programových prostrediach. Prvý z nich, Geostokos Toolkit, bol použitý pre geoštatistický odhad celkových zásob na dvoch slovenských magnezitových ložiskách aplikovaním lineárneho a lognormálneho prístupu. Na základe porovnaní je jednoznačne zrejmé, že programové prostredie Isatis disponuje podstatne kvalitnejšími nástrojmi pre geoštatistické modelovanie geologických objektov a ich vnútornej stavby pre potreby banskej praxe. Dlhoročné autorove skúsenosti s prácou v prostredí Isatis potvrdzujú neustály nárast a aktualizáciu najmodernejších metód a techník pre modelovanie nie len celkových zásob, ale aj lokálne vyťažiteľných zásob s možnosťou integrácie zložitých geologických modelov. Výsledky týchto odhadov a simulácií sú ľahko aktualizovateľné na základe meniacich sa podmienok ťažby alebo nových dostupných údajov a sú bežne používané v banských podmienkach na svetových ložiskách úžitkových nerastov. Prednosti práce v prostredí Isatis vyplývajú z jeho úzkej špecializácie na geoštatistické modelovanie takej kvality a hĺbky akú neponúkajú žiadne iné programové prostredia používané v banskom priemysle, ktoré už boli v príspevku spomenuté. Tieto sú po väčšinou založené na princípe univerzality a integrujú v sebe moduly od CAD až po ekonomické vyhodnotenia výsledkov na úkor kvality jednotlivých modulov (alebo aspoň geoštatistického). Na druhej strane sú však pružnejšie na čo spoločnosť Geovariances reaguje neustálym vývojom interaktívnych prepojení, importov a exportov medzi Isatis a týmito programovými prostrediami. Napriek tomu, že výsledky jednotlivých príkladov v tomto príspevku boli prezentované v prostredí ArcGIS, nie je samotný ArcGIS stavaný na modelovanie v oblasti geológie a baníctva a nie je ho možné radiť medzi spomínané profesionálne prostredia z celej rady dôvodov. Napriek tomu je toto prostredie vhodné na vizualizáciu nie len vstupov a výsledkov geoštatistického modelovania realizovaného v špecializovanom prostredí.

Reference

1. Armstrong, M., Galli, A. G., Le Loc'h, G., Geffroy, F., Eschard, R.: *Plurigaussian Simulation in Geosciences*. Springer, 2003, Germany. ISBN 3-540-42390-7.
2. DAVID, M. *Geostatistical Ore Reserve Estimation*. Elsevier Scientific Publishing Company, 1977. Netherlands. ISBN 0-444-41532-7.
3. JOURNEL, G. A., HUIJBREGTS, Ch. J. *Mining Geostatistics*. Academic Press Ltd., 1978, GB. ISBN 0-12-391056-0.
4. JOURNEL, G. A., KIRIAKIDIS C. P. *Evaluation of Mineral Reserves – A Simulation Approach*. Oxford University Press, 2004, U.S.A. ISBN 0-19-516694-9.
5. Kolektív študentov Geoinformatizácia, V. ročník: Návrh tvorby geografického informačného systému pre baňu Bankov. *Záverečná správa projektu cvičení z predmetu Modelovanie geologických systémov a procesov*. TU, FBERG. 2001 a 2003 (Kapitola 3.4.).
6. LEUANGTHONG, O., KHAN, D. K., DEUTSCH, C. V.: *Solved Problems in Geostatistics*. A John Wiley and Sons, Inc., Publication, 2008, U.S.A. ISBN 978-0-470-17792-1.
7. MATHERON, G. *The Theory of Regionalized Variables and its Application*. École Nationale Supérieure des Mines des Paris, 1971.
8. MESARČÍK, I, et.al.: *Záverečná správa s výpočtom zásob Rožňava – Strieborná žila, VP. Manuskript – Geologický prieskum, š.p. SNV*. 1991.
9. MIŠOVIC, P., SASVÁRI, P. Specialized mining GIS MineGIS SMZ Jelšava. *Acta Montanistica Slovaca.*, 10. Nr. 4. TU, FBERG, Košice, 2005. ISSN 1335-1788.
10. RIVOIRARD, J. *Disjunctive Kriging and Non-Linear Geostatistics*. Oxford University Press, 1999, GB. ISBN 0-19-874180-4.
11. STANĚK, F. *Tvorba modelu ložiska uhlí a způsoby jeho hodnocení*. Monografie. Sborník vědeckých prací VŠB-TU Ostrava, 2005, Ostrava. ISBN 80-248-0849-8.
12. VIZI, L., HLÁSNY, T.: Výber účinného okolia odhadu a jeho vplyv na výsledok priestorovej interpolácie. In: *Acta Montanistica Slovaca*. roč. 12, č. 3. TU, FBERG Košice, 2007. ISSN 1335-1788. <http://actamont.tuke.sk/pdf/2007/n3/13vizi.pdf>
13. VIZI, L.: *Geologický informačný systém pre ťažobný blok C na ložisku Jelšava: Záverečná správa (Kapitoly 1 – 5 + Prílohy)*. TU, FBERG, Košice, 2002.
14. VIZI, L., TIMČÁK, G. M.: Význam štúdia lognormálneho rozdelenia v geológii a baníctve. In: *Sborník vědeckých prací Vysoké školy baňské - Technické univerzity Ostrava.*, Vol. 48, No. 1. Ostrava, 2002. ISSN 0474 -8476.
15. VIZI, L.: Indikátory vo vzťahu k regionálnej premennej. In: *Acta Montanistica Slovaca*. roč. 6, *mimoriadne č. Práce doktorandov*. TU, FBERG, Košice, 2001. ISSN 1335-1788. <http://actamont.tuke.sk/ams2001.html>
16. VIZI, L.: Vplyv zavedenia systému zlomov do geoštatistického modelovania - prípadová štúdia modelovania geometrie bazálneho lignitového sloja b1 (Beladice). In: *Acta Montanistica Slovaca*. roč. 13, č. 1. TU, FBERG Košice, 2008. ISSN 1335-1788. <http://actamont.tuke.sk/pdf/2008/n1/28vizi.pdf>
17. VIZI, L., TIMČÁK, G. M., HOSA, V.: Geostatistical analysis of the Kišovce - Švábovce Mn deposit (Slovakia). In: *Mining and geotechnology environmental management*. vol. 65. Miskolc University Press, 2003. ISSN 1219-008X.
18. VIZI, L.: Multivariačné geoštatistické prístupy. In: *3D modelovanie a vizualizácia priestorových dát*. STU, 2008, Bratislava. ISBN 978-80-227-2988-8.
19. VIZI, Ladislav: A case study on uniform conditioning of local recoverable reserves estimation for Jelšava magnesite deposit - level 220. In: *GeoScience Engineering*. vol. 54, no. 1. VŠB-TU Ostrava, 2008. ISSN 1802-5420. <http://gse.vsb.cz/2008/LIV-2008-1-41-53.pdf>
20. WACKERNAGEL, H. *Multivariate Geostatistics*. 3rd edition. Springer-Verlag Print, 2003, Berlin. ISBN 3-540-44142-5.
21. www1: <http://geoecosse.bizland.com/store/Toolkit.htm>
22. www2: <http://geostokos.kriging.com/toolkit.htm>
23. www3: <http://www.goldensoftware.com/products/surfer/surfer.shtml>
24. www4: www.geovariances.com