Základy informatiky

Výroková logika

Zpracoval: Ing. Pavel Děrgel
Upravila: Daniela Sztrucová

Obsah přednášky

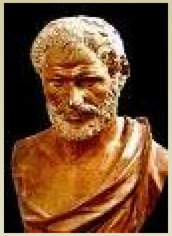
- Výroková logika
  - Výroky
  - Pravdivostní ohodnocení
  - Logické spojky
  - Výrokově logická analýza

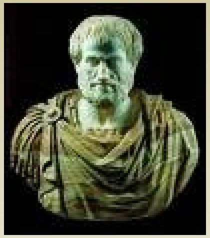
Aristotelés (384 – 322 př. n. l.)

Organon

10 kategorií

- Substance
- Kvantita
- Kvalita
- Vztah
- Místo
- Čas
- Poloha
- Mít
- Činnost
- Trpnost





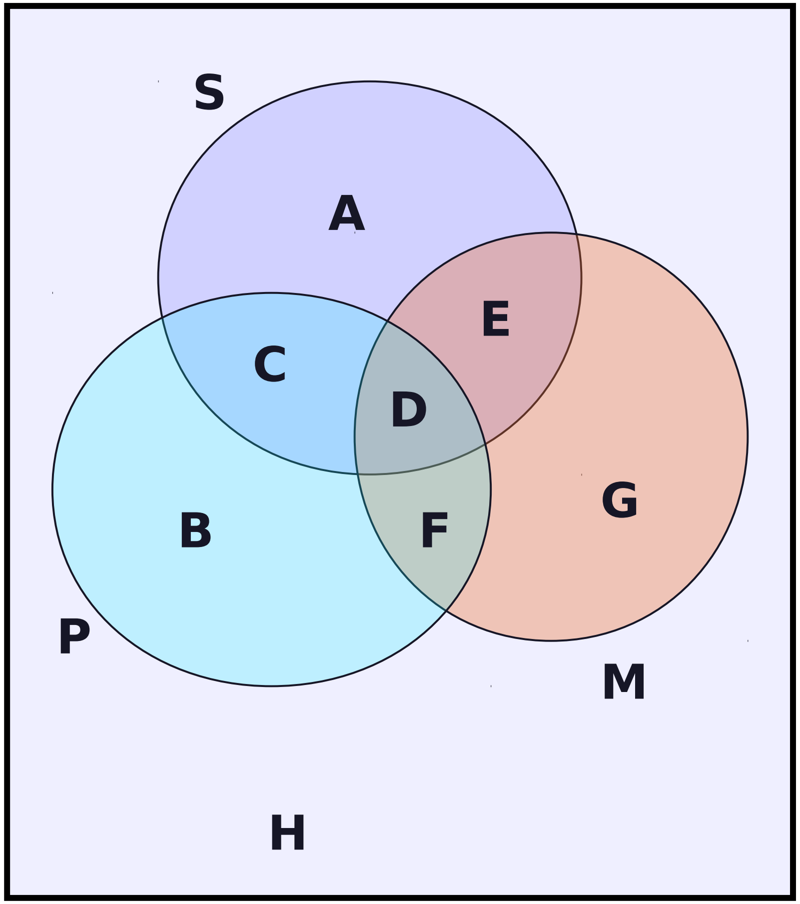
Sylogismus

Premisa 1: Každý člověk je smrtelný.

Premisa 2: Sokrates je člověk.

Závěr: Sokrates je smrtelný.

Grafické znázornění (v universu U):



A: $S \setminus (P \cup M) = (S \setminus P) \cap (S \setminus M)$

$S(x) \wedge \neg(P(x) \vee M(x)) \Leftrightarrow S(x) \wedge \neg P(x) \wedge \neg M(x)$

B: $P \setminus (S \cup M) = (P \setminus S) \cap (P \setminus M)$

$P(x) \wedge \neg(S(x) \vee M(x)) \Leftrightarrow P(x) \wedge \neg S(x) \wedge \neg M(x)$

C: $(S \cap P) \setminus M$

$S(x) \wedge P(x) \wedge \neg M(x)$

D: $S \cap P \cap M$

$S(x) \wedge P(x) \wedge M(x)$

E: $(S \cap M) \setminus P$

$S(x) \wedge M(x) \wedge \neg P(x)$

F: $(P \cap M) \setminus S$

$P(x) \wedge M(x) \wedge \neg S(x)$

G: $M \setminus (P \cup S) = (M \setminus P) \cap (M \setminus S)$

$M(x) \wedge \neg(P(x) \vee S(x)) \Leftrightarrow M(x) \wedge \neg P(x) \wedge \neg S(x)$

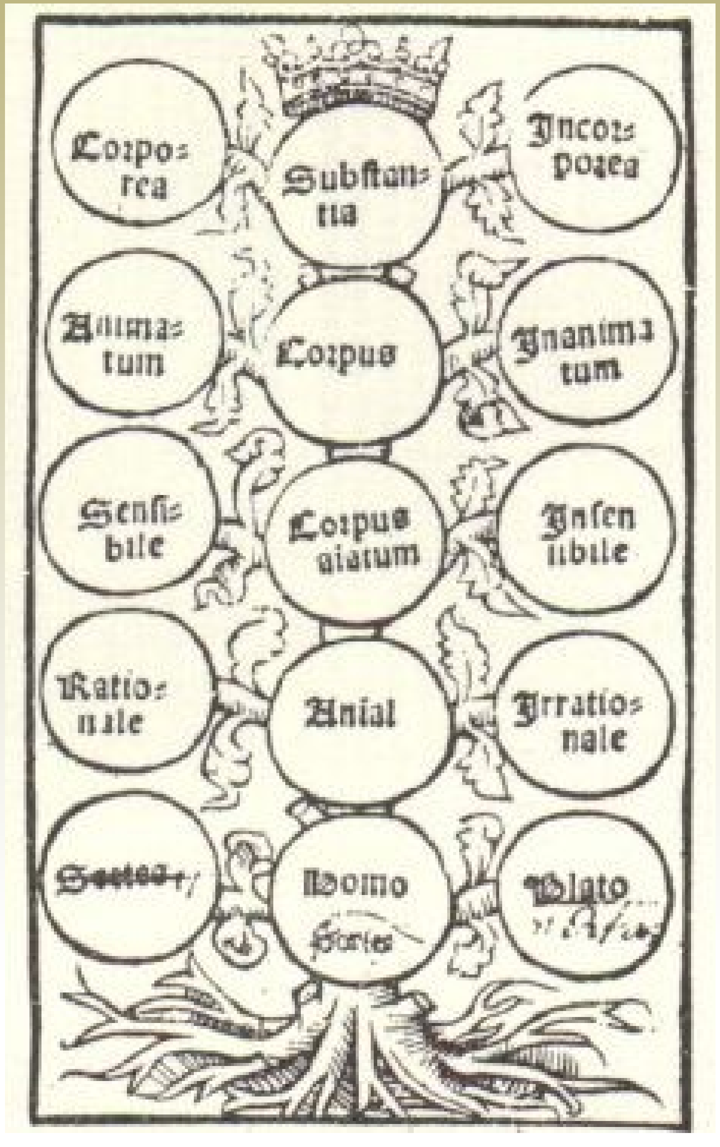
H: $U \setminus (S \cup P \cup M) = (U \setminus S \cap U \setminus P \cap U \setminus S)$

$\neg(S(x) \vee P(x) \vee M(x)) \Leftrightarrow \neg S(x) \wedge \neg P(x) \wedge \neg M(x)$

převzato z Úvod do logiky M. Duží

Porphirius z Tyru (233-305 n.l.)

- Úvod k Aristotelovým kategoriím
- Vícestupňová subordinace rodových a druhových pojmů



Occamova břitva

Pluralitas non est ponenda sine necessitate.

Pokud pro nějaký jev existuje vícero vysvětlení, je lépe upřednostňovat to nejméně komplikované.

Výrok

Definice

Výrok je tvrzení, o kterém má smysl tvrdit, zda je pravdivé nebo ne.

Příklady

- Tráva je zelená (výrok)
- 2 + 2 = 5 (nepravdivý výrok)
- Otevři okno. (není výrok)

Typy výroků

Výroky dělíme na:

- Jednoduché - žádná vlastní část jednoduchého výroku již není výrokem
- Složené - výrok má vlastní část(i), která je výrokem

- Význam složeného výroku je funkcí významu jeho složek.
- Význam jednoduchých výroků redukuje VL na Pravda (1), Nepravda (0).
- Proto je výroková logika vlastně algebrou pravdivostních hodnot.

Příklady složených výroků

- Není pravda, že v Praze prší.

spojka V

- V Praze prší a v Brně je hezky.

V1 spojka V2

Výrokové symboly

- Jazyk výrokové logiky obsahuje symboly zastupující jednotlivé elementární výroky (tzv. výrokové proměnné).

  Příklad: V Praze prší a v Brně je hezky ---> $A \wedge B$

- Výrokové symboly se běžně označují písmeny A,B... nebo p,q,r ...

Formule výrokové logiky

Definice:

(1) Výrokové symboly jsou formule.

(2) Jsou-li výrazy A, B formule, pak jsou formulemi i výrazy (¬A), (A ∧ B), (A v B), (A ⇒ B), (A ⇔ B)

(3) Jin0 formule v7rokov0 logiky, než podle bodů (1) a (2) neexistují.

Poznámky:

- Formule vzniklé podle bodu (1) nazýváme elementárními (atomárními) formulemi.
- Formule vzniklé pomocí bodu (2) se nazývají složené.

Jazyk výrokové logiky

Definice:

- Jazyk výrokové logiky je množina všech formulí výrokové logiky.

Logické operace

Logická spojka	**význam**
¬	negace
∧	konjunkce
∨	disjunkce
⇒	implikace
⇔	ekvivalence

Negace

- Pravdivostní funkce negace je v přirozeném jazyce vyjadřována pomocí „ne“ nebo „není pravda, že...“
- Významem negace je popření výroku nebo vyjádření opaku.

Příklad:

- p: Karel má auto.
- ¬p: Karel nemá auto (není pravda, že Karel má auto)

p	**¬p**
1	0
0	1

Konjunkce

- Vyjadřuje se slovy „a“ nebo „a zároveň“...
- Konjunkce ($p \wedge q$) je pravdivá právě tehdy, jsou-li výroky p i q pravdivé.

Příklad:

- Prší a je mlha.
- Mám hlad a chce se mi spát.
- Nepůjdu do kina ani do divadla.

p	**q**	**p ∧ q**
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Disjunkce (alternativa)

- Vyjadřuje se většinou slovem „nebo“ .
- Disjunkce (*p* v *q*) je pravdivá pokud je alespoň jeden z výroků *p* v *q* pravdivý.

Příklad:

- Autobusem jede Karel nebo Pepa.
- Půjdu do kina nebo do divadla.

p	**q**	**p ∨ q**
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Implikace

- Vyjadřuje se většinou slovy „jestliže, pak...“ .

Příklad:

- Jestliže je číslo dělitelné dvěma, pak je sudé.
- Když zaspím, přijdu pozdě.
- Nebude-li pršet, nezmoknem.

p	**q**	**$p \Rightarrow q$**
0	0	1
1	0	**0**
0	1	1
1	1	1

Ekvivalence

- Vyjadřuje se většinou slovy „právě tehdy, když...“ .
- Věta tvaru ekvivalence je pravdivá právě tehdy, když jsou oba jednoduché výroky buď oba pravdivé nebo oba nepravdivé.

Příklad:

- Duha vzniká právě tehdy, když za deště svítí slunce.
- Cena benzínu roste, právě tehdy když roste cena ropy.

p	**q**	**$p \Leftrightarrow q$**
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Pravdivostní ohodnocení formulí

- Neformálně řečeno se jedná o přiřazení hodnoty 0 nebo 1 pro každý elementární výrok formule.
- Formálně je to zobrazení, které ke každému výrokovému symbolu přiřazuje pravdivostní hodnotu z množiny {1,0}.
- Pravdivostní hodnotu formule A budeme označovat w(A). (funkce, která každému symbolu přiřadí hodnotu z množiny {1,0}).
  - Příklad: formuli (A ∧ B) v C je možné ohodnotit třeba takto: w(A)=0, w(B)=1, w(C)=0 (A a C jsou nepravdivé výroky, B je pravdivý).
- Pokud je formule tvořena z ***k*** různých výrokových symbolů, pak existuje celkem $\mathbf{2^k}$ různých pravdivostních ohodnocení.

Priorita logických operátorů

- Logické spojky jsou uspořádány do prioritní stupnice
  - $\neg$,
  - $\wedge$,
  - $\vee$,
  - $\Rightarrow$,
  - $\Leftrightarrow$

Příklad:

- A v ¬B ∧ C se vyhodnotí takto: A v ((¬B) ∧ C)

Poznámka:

- Pro větší přehlednost je lepší na priority nespoléhat a závorky používat.

Tautologie

Tautologie je výroková formule, která je vždy pravdivá nezávisle na pravdivosti elementárních výroků, ze kterých je složena.

Příklad: p v ¬p je tautologie.

p	**¬p**	**p ∨ ¬p**
1	0	1
0	1	1

Kontradikce

Kontradikce je výroková formule, která je vždy nepravdivá nezávisle na pravdivosti elementárních výroků, ze kterých je složena.

Příklad: $(p \land \neg p)$ je kontradikce.

p	**¬p**	**p ∧ ¬p**
1	0	0
0	1	0

Splnitelnost

Výroková formule je splnitelná, pokud existuje takové pravdivostní ohodnocení takové, že pravdivostní hodnota formule je 1.

Příklad: formule (A v A) je splnitelná.

Ekvivalentní formule

Dvě formule jsou ekvivalentní pokud nabývají stejnou pravdivostní hodnotu pro jakékoliv ohodnocení.

Příklad:

Ověřte, že formule $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$ a $(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ jsou ekvivalentní.

α	β	γ	$\beta \vee \gamma$	$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Výrokově logická analýza

- Převod z přirozeného jazyka do symbolického jazyka výrokové logiky.
- Umožňuje studovat strukturu vět z hlediska skládání jednoduchých výroků do složených výroků pomocí logických spojek.

Výrokově logická analýza

Negace ¬ odpovídá „není pravda, že..“.

Je to unární spojka (nespojuje dva výroky).

Příklad:

- Není pravda, že Praha je velkoměsto --> ¬p

Výrokově logická analýza

Konjunkce ∧ odpovídá „a“. Je to binární spojka (spojuje dva výroky).

Příklad:

- Praha je hlavní město ČR a v Praze je sídlo prezidenta ČR --> p ∧ q
- Praha je hlavní město ČR a 2+3=5 --> p ∧ r

Výrokově logická analýza

Disjunkce v odpovídá „nebo“. Je to binární spojka (spojuje dva výroky).

Příklad:

- Osobní auta mají přední nebo zadní náhon (nebo obojí) --> p v q

Výrokově logická analýza

Implikace $\Rightarrow$ odpovídá „jestliže, pak“. Je to binární spojka (spojuje dva výroky).

Příklad:

- Jestliže 1+1=2, pak železo je kov --> $p \Rightarrow q$

Výrokově logická analýza

Ekvivalence ⇔ odpovídá „právě tehdy, když“. Je to binární spojka (spojuje dva výroky).

Příklad:

- Uděláte zkoušku, právě tehdy když získáte dostatečný počet bodů. --> $p \Leftrightarrow q$

Poznámka:

- V přirozeném jazyce se spojka ekvivalence používá velmi zřídka, mnohem větší význam a častější použití má v exaktních vědách.

Výrokově logická analýza

Převod z přirozeného jazyka nemusí být vždy jednoznačný:

Jestliže má člověk vysoký tlak a špatně se mu dýchá nebo má zvýšenou teplotu, pak je nemocen.

p – ”X má vysoký tlak”

q – ”X se špatně dýchá”

r – ”X má zvýšenou teplotu”

s – ”X je nemocen”

1. analýza: $[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow s$

2. analýza: $[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow s$

Příklad

Lev a Jednorožec

Alenka stretla v Lese zabúdania Leva a Jednorožca. Sú to zvláštne stvorenia. Lev každý pondelok, utorok a stredu klame a ostatné dni v týždni hovorí pravdu. Jednorožec klame vždy vo štvrtok, v piatok a v sobotu, ale ostatné dni v týždni hovorí pravdu.

Lev: Včera som mal klamací deň.

Jednorožec: Ja tiež.

Ktorý bol práve deň?

http://brainden.com/hlavolamy/vyrokova-logika.htm

Reference

[1] Duží, M.; Markl J.: Matematická logika